VELEUČILIŠTE MARKO MARULIĆ
KNIN

PRIJEDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ
PREHRAMBENA TEHNOLOGIJA

Udžbenik
FIZIKA

mr. sc. JOSIP PAIĆ, viši predavač

Izdavač:
Veleučilište „Marko Marulić“ u Kninu

Za izdavača:
Dekan Veleučilišta u Kninu
dr. sc. Marijana Drinovac Topalović, prof. struč. stud.

Recenzenti:
prof. dr. sc. Ante Bilušić
docent dr. sc. Mirko Marušić

Lektura:
Lučana Banek, prof.

Naslovnica:
GOOD IDEA, obrt za IT usluge

Prijelom i optimizacija:
GOOD IDEA, obrt za IT usluge

CIP zapis je dostupan u računalnome katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001227440

ISBN - 978-953-7504-23-6

Objavljivanje ovog udžbenika odobrilo je
Vijeće Veleučilišta „Marko Marulić“ u Kninu
na sjednici od 31. siječnja 2023. godine.

Knin, 2024.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namijenjen je studentima prijediplomskog stručnog studija Prehrambena tehnologija Veleučilišta „Marko Marulić“ u Kninu. Vjerujem da se njime mogu koristiti i studenti drugih Veleučilišta u Republici Hrvatskoj koji imaju isti Izvedbeni nastavni plan i program obveznog nastavnog predmeta Fizika.

U ovom je udžbeniku cjelovito gradivo koje prati Izvedbeni nastavni plan i program obveznog nastavnog predmeta Fizika. Gradivo je raspoređeno u dvanaest nastavnih cjelina: Uvod u fiziku, Kinematika, Dinamika, Energija i zakoni očuvanja, Statika krutog tijela, Gibanje krutog tijela, Gravitacija, Fluidi, Titranje, Valovi, Svjetlost, Uvod u kvantnu fiziku. U svakoj se cjelini nalazi priličan broj riješenih primjera za svaku nastavnu jedinicu, a na kraju svake cjeline nalaze se pitanja i zadaci prema kojima se studenti mogu pripremati za ispit. U udžbeniku se nalazi priličan broj crteža, što će studentima omogućiti bolje razumijevanje fizikalnih zakonitosti.

Nadam se da će studentima također znatno olakšati praćenje nastave kao i samo studiranje te pripremu za polaganje ispita jer je cjelokupno gradivo sakupljeno na jednom mjestu.

Knin, rujan 2022. mr. sc. JOSIP PAIĆ, viši predavač

ISHODI UČENJA

CILJEVI PREDMETA, KOMPETENCIJE, ISHODI UČENJA I METODOLOGIJA

CILJEVI

Cilj predmeta je pripremiti studente za inženjerske zahtjeve i tehnološku procesnu praksu s kojom će se susresti u svojem budućem radu.

KOMPETENCIJE

Opće kompetencije

Studenti će nakon izvršenja svih aktivnosti moći samostalno nadograđivati stečeno znanje upotrebom informatičkih tehnologija, prenositi znanje u druge predmete, primjenjivati znanje u praksi te raditi samostalno i u timu.

Specifične kompetencije
Studenti će nakon izvršenja svih aktivnosti biti sposobni primjenjivati znanja iz kinematičkih i dinamičkih pojmova i zakona u kontekstu mehanike i valova te uvodnih pojmova iz kvantne fizike u svim područjima inženjerstva i u onim procesima gdje dolazi do razumijevanja nekoliko vrsta prikaza (dijagram, graf, tablica, formula) i prijelaza iz jednog prikaza u drugi.

ISHODI UČENJA

Očekuje se da će nakon izvršenja svih programom predviđenih obveza student moći:
1. objasniti osnovne pojmove fizike te načela i principe fizikalnih zakona;
2. usporediti osnovne fizikalne zakone;
3. usporediti vrste gibanja, vrste energije, vrste valova, valna i čestična ponašanja;
4. primijeniti osnovna znanja o načelima i principima fizikalnih zakona u kemijsko-inženjerskim analizama i izračunima;
5. primijeniti Newtonove zakone, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja energije, zakone geometrijske optike, zakone zračenja crnog tijela i fotoelektrični učinak u rješavanju inženjerskih problema.

Pristupi podučavanja i učenja u predmetu

Nastava obveznog predmeta Fizika ostvaruje se kroz predavanja i vježbe. Na predavanjima se usvaja teorijska podloga i obrađuju karakteristični primjeri te se naglasak stavlja na razumijevanje gradiva. Kroz auditorne vježbe, stečeno znanje primjenjuje se i nadograđuje rješavanjem zadataka iz tehničke prakse. Time se omogućava lakše savladavanje gradiva i obrada konkretnih fizikalnih problema na znanstvenim osnovama. Cijeli proces podučavanja bit će usmjeren na studenta.

Izvedbeni nastavni program

1. Uvod – opće osnove
2. Kinematika
3. Dinamika
4. Energija i zakoni očuvanja
5. Newtonov opći zakon gravitacije
6. Fluidi
7. Titranje i valovi
8. Optika
9. Struktura materije - uvod u kvantnu fiziku

ISHODI UČENJA

Objasniti osnovne pojmove fizike te načela i principe fizikalnih zakona.

- Jednoliko i jednoliko ubrzano i usporeno pravocrtno gibanje
- Slobodni pad
- Newtonovi zakoni mehanike I., II., III. zakon)
- Energija (gravitacijska potencijalna, kinetička i elastična potencijalna) i zakoni očuvanja (zakon očuvanja energije i zakon očuvanja količine gibanja)
- Rotacija krutog tijela (moment sile, temeljni zakon rotacije)
- Newtonov zakon gravitacije
- Hidrostatski i hidrodinamički tlak, atmosferski tlak
- Pascalov i Arhimedov zakon
- Bernoullieva jednažba
- Titranje i valovi, zvuk, stojni val, Dopplerov učinak
- Zakoni geometrijske optike, zrcala, leće
- Zračenje užarenog tijela, fotoelektrični učinak

Usporediti osnovne fizikalne zakone.

- Gibanja
- Newtonovi zakoni
- Zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja energije
- Newtonov zakon gravitacije, sateliti
- Arhimedov i Pascalov zakon
- Zakoni geometrijske optike
- Zakoni zračenja užarenih tijela i fotoučinak

Usporediti vrste gibanja, vrste energije, vrste valova, valna i čestična ponašanja.

- Jednoliko i jednoliko ubrzano i usporeno gibanje, uzroci pojedinih vrsta gibanja, zakoni očuvanja, valnočestična svojstva elektromagnetskog zračenja i čestica tvari

Primijeniti osnovna znanja o načelima i principima fizikalnih zakona u kemijsko-inženjerskim analizama i izračunima.

- Gibanja
- Newtonovi zakoni
- Newtonov opći zakon gravitacije, sateliti
- Titranja i valovi
- Zakoni očuvanja
- Geometrijska i valna optika
- Fotoelektrični učinak

Primijeniti Newtonove zakone, zakon očuvanja količine gibanja, zakon očuvanja energije, zakone geometrijske optike, zakone zračenja crnog tijela i fotoelektrični učinak u rješavanju inženjerskih problema.

- Trenje, kružno gibanje
- Sudari
- Dopplerov učinak, stojni val, rezonancija (mehanička, akustična, električna)
- Elektromagnetski valovi, televizija
- Naočale, oko, dioptrija
- Hidraulični strojevi, Venturijeva cijev
- Fotoćelija

1. UVOD U FIZIKU

Riječ fizika potječe od grčke riječi **φυσίζ (fizis)**, što znači priroda, zato se fizika zvala i filozofija prirode. Fizika je prirodna znanost koja proučava ono s čime se susrećemo u prirodi. Ona proučava zbivanja u prirodi i objašnjava njihove uzroke.

Možemo reći da je fizika osnovna prirodna znanost koja proučava opća svojstva i zakone gibanja materije od gibanja tijela do strukture i svojstava fizikalnog prostora i polja. Ona proučava mikrosvijet (elementarne čestice, atome, molekule) i makrosvijet (tijela na Zemlji, planeti, zvijezde…).

Nadalje, možemo reći da je fizika sve ono čime se bave fizičari jer upravo fizičari nastoje otkriti zakone ponašanja materije te doći do spoznaja koje se mogu primijeniti u tehnici, gospodarstvu i u drugim ljudskim djelatnostima. Primjerice, otkriće tranzistora (1947.) osnova je za konstrukciju računala, otkriće lasera (1960.) vodi do novog oruđa za obradu i analizu materijala, otkriće organskih vodiča i vodljivih plastika (1978.) i visokotemperaturne supravodljivosti (1986.) vode do novih kvalitetnijih industrijskih materijala itd.

Fizika ima značajnu ulogu u stručnom studiju Prehrambena tehnologija u izobrazbi prvostupnika/prvostupnica Prehrambene tehnologije jer poznavanjem fizikalnih zakona studenti Prehrambene tehnologije mnogo lakše savladavaju predmete struke, putem nastave fizike formira se znanstveni pogled na svijet, a fizikalni način razmišljanja omogućuje bolji pristup rješavanju različitih problema u struci. Danas je fizika živa i vrlo dinamična znanost jer tijekom jedne godine fizičari objave nova znanstvena otkrića na više od milijun stranica u međunarodnim znanstvenim časopisima, knjigama i na internetu.

Fizika je eksperimentalna znanost i zasniva se na promatranju prirodnih pojava, izvođenju eksperimenata i mjerenju. Ponekad se do nekog fizikalnog zakona može doći teorijski, a potom ga eksperimentalno provjeriti.
Fizikalne zakonitosti simbolički najlakše izražavamo matematički, pomoću formula. Matematika služi da se fizikalni zakoni izraze jasno i precizno, da se povezuju i izvode jedan iz drugoga.

Fizika se dijeli na klasičnu i modernu. Klasična fizika temelji se na Newtonovim aksiomima do kojih je Newton došao u 17. stoljeću. Mnogi fizičari 19. stoljeća smatrali su da klasična fizika može objasniti sve pojave u prirodi. Međutim, krajem 19. i početkom 20. stoljeća neke pojave klasična fizika nije mogla objasniti (npr. zračenje crnog tijela, fotoučinak itd.). Tada se pojavljuje moderna fizika: kvantna fizika i teorija relativnosti.

Zbog povijesnih razloga, fizika se dijeli po područjima: mehanika, toplina, elektromagnetizam, optika, atomska fizika, nuklearna fizika, da navedemo samo neka. U ovom udžbeniku obradit će se dio fizike prema Izvedbenom nastavnom planu i programu obveznog nastavnog predmeta „Fizika“ za prijediplomski stručni studij Prehrambena tehnologija Veleučilišta u Kninu.

1.1. MJERENJE U FIZICI

„… Kada ono o čemu govorite možete i izmjeriti i izraziti brojevima, tada znate nešto o tome; kada to ne možete izmjeriti, tada je vaše znanje oskudno i nedovoljno…“

William Thomson, lord Kelvin (1824. – 1907.)

Mjerenje ima vrlo važnu ulogu u fizici kao i u ostalim prirodnim znanostima jer je ono neophodno.

Mjeriti neku fizikalnu veličinu znači odrediti broj koji pokazuje koliko puta ta veličina sadrži istovrsnu veličinu dogovorom uzetu kao jedinicu.

Uz taj određeni broj uvijek treba staviti jedinicu koja mu daje fizikalno značenje. Definicija jedinice mora biti točna, tako da prema njoj možemo uvijek ostvariti fizikalnu veličinu koja će po dimenzijama odgovarati definiranoj jedinici.

Jedinice mogu biti **osnovne** i **izvedene**. Osnovne jedinice definiramo neovisno o ijednoj drugoj jedinici. Izvedene jedinice izvodimo iz osnovnih. Osnovne jedinice i sve koje su iz njih izvedene čine **sustav jedinica.**

Na 11. Generalnoj konferenciji za utege i mjere 1960. godine prihvaćen je **Međunarodni sustav jedinica, SI sustav** (System International) i preporučeno je da se upotrebljava u svim područjima znanosti i tehnike. Od 1. srpnja 1976. upotreba ovog sustava postala je obvezna u Hrvatskoj u javnom prometu.

Osnovne fizikalne veličine i njima odgovarajuće jedinice Međunarodnog sustava jedinica (SI) su:

Fizikalna veličina i znak	**Mjerna jedinica i znak**
duljina (*l*)	metar, **m**
masa (*m*)	kilogram, **kg**
vrijeme (*t*)	sekunda, **s**
jakost električne struje (*I*)	amper, **A**
termodinamička temperatura (*T*)	kelvin, **K**
jakost svjetlosti (*I*)	kandela, **cd**
množina ili količina tvari (*n*)	mol, **mol**

Tablica 1.1. Osnovne fizikalne veličine i jedinice međunarodnog sustava jedinica SI-ja

Najčešće su osnovne veličine duljina, masa i vrijeme, a njihove su osnovne jedinice metar, kilogram i sekunda, pa ćemo dati samo njihove definicije.

Metar je duljina puta koju u vakuumu svjetlost prijeđe za vrijeme $\frac{1}{299792458}$ sekunde.

Kilogram se definira pomoću Planckove konstante $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ [$Js = kg\ m^2\ s^{-1}$]

($1\ kg = \frac{h\upsilon_{Cs}}{c^2}$), gdje su metar i sekunda definirani odnosima c i $\Delta\nu_{Cs}$, c brzina svjetlosti u vakuumu, a $\Delta\nu_{Cs}$ je hiperfina prijelazna frekvencija cezijevog atoma ^{133}Cs.

Sekunda je trajanje 9192631770 razdoblja zračenja koje nastaje pri prijelazu elektrona između dviju hiperfinih razina osnovnog stanja atoma ^{133}Cs.

Iz osnovnih jedinica mogu se izvesti jedinice za sve ostale fizikalne veličine pomoću algebarskih izraza, matematičkim operacijama. Tako je mjerna jedinica za silu, koja ima naziv **njutn (N)**, definirana pomoću osnovnih jedinica za masu, duljinu i vrijeme, iz drugog Newtonovog zakona:

$$F = m\ a\ [kg\ m\ s^{-2} = N]$$

Dodavanjem određenih predmetaka osnovnim jedinicama dobivamo njihove decimalne dijelove i višekratnike, npr. 1 cm = 10^{-2} m, ms = 10^{-3} s itd. Međunarodno prihvaćeni predmeci navedeni su u tablici 1.2.:

Predmetak	**Znak**	**Vrijednost**	**Predmetak**	**Znak**	**Vrijednost**
deci	D	10^{-1}	deka	da	10^{1}
centi	C	10^{-2}	hekto	h	10^{2}
mili	M	10^{-3}	kilo	k	10^{3}
mikro	M	10^{-6}	mega	M	10^{6}
nano	N	10^{-9}	giga	G	10^{9}
piko	P	10^{-12}	tera	T	10^{12}
femto	F	10^{-15}	peta	P	10^{15}
ato	A	10^{-18}	eksa	E	10^{18}
zepto	Z	10^{-21}	zeta	Z	10^{21}
jokto	Y	10^{-24}	jota	Y	10^{24}

Tablica 1.2. Predmeci za tvorbu decimalnih jedinica

Vrlo veliki i vrlo mali iznosi veličina obično se iskazuju znanstvenom notacijom pomoću potencije baze deset. Tako je brzina svjetlosti:

$$c = 299792458 \text{ m s}^{-1} \approx 3 \cdot 10^{8} \text{ m s}^{-1}$$

Na računalima je znanstvena notacija kraća, c $\approx 3E8$ m s^{-1}, a E ovdje označava eksponent potencije.

Također se obično rabe prefiksi, npr. polumjer Zemlje je: R = 6370000 = 6370 km.

Napomenimo da zakon dopušta i neke jedinice izvan međunarodnog sustava jedinica u područjima u kojima su neophodne. To su: čvor, morska milja, ar (a), hektar (ha), litra (L), stupanj (°), atomska jedinica mase (u), minuta (min), sat (h), dan (d), vatsat (Wh), elektronvolt (eV), Celzijev stupanj (°C), bar (bar) i još neke.

U fizici mjerimo pomoću raznih instrumenata uz upotrebu svojih osjetila, određujući mjerni broj. Ni instrumenti ni naša osjetila nisu savršeni. Uzastopnim mjerenjem iste veličine istim instrumentom i na isti način dobit ćemo različite rezultate zbog neizbježnih pogrešaka pri mjerenju. Pogreške mogu biti sustavne, slučajne i grube. Ograničit ćemo se na izračunavanje slučajnih pogrešaka.

Neka su podaci mjerenja neke dužine: $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$.

Njihova srednja vrijednost jest: $\bar{l} = \dfrac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n}$

Odstupanje pojedinog mjerenja od srednje vrijednosti svih mjerenja zove se apsolutna pogreška pojedinog mjerenja: $\Delta l_1 = \bar{l} - l_1$; $\Delta l_2 = \bar{l} - l_2$; $\Delta l_3 = \bar{l} - l_3$ itd., što općenito pišemo

$$\Delta l_n = \bar{l} - l_n$$

Apsolutna vrijednost najvećeg odstupanja od srednje vrijednosti zove se maksimalna apsolutna pogreška Δl_m, pa rezultat pišemo:

$$l = \bar{l} \pm \Delta l_m$$

Znači da vrijedi:

$$\bar{l} + \Delta l_m > l > \bar{l} - \Delta l_m$$

Međutim, maksimalna apsolutna pogreška Δl_m nije nam uvijek prava mjera za procjenu koliko smo pogriješili. Zato moramo uzeti u obzir i maksimalnu relativnu pogrešku koja nam pokazuje koliki je utjecaj pogreške pri mjerenju, a jednaka je kvocijentu maksimalne apsolutne pogreške i srednje vrijednosti svih mjerenja, što možemo izraziti u postocima:

$$r_m = \frac{\Delta l_m}{\bar{l}} = \left(\frac{\Delta l_m}{\bar{l}} \cdot 100\right)\%$$

Već su stare civilizacije poznavale mjerne jedinice i koristile se osnovnim mjerenjima (vaganje zlata u starom Egiptu, mjerenje mase; pisar – mjernik u starom Egiptu, mjerenje duljine; kalendar Azteka, mjerenje vremena).

Navedimo primjer primjene starih jedinica: kada je Fidipid trčao od Maratona do Atene 490. godine prije Krista da bi obavijestio o grčkoj pobjedi nad Perzijom, trčao je otprilike brzinom od 23 rajda na sat. Izrazite tu brzinu u km h^{-1} i m s^{-1}? (Rajd je starogrčka mjera za duljinu; 1 rajd = 4 stadija, 1 stadij = 6 pletrona, 1 pletron = 30,8 metara).

Rješenje:

$$23\frac{rajda}{h} = 23\frac{4stadija}{h} = 92\frac{6\,pletrona}{h} = 552\frac{30{,}8m}{h} = 17001{,}6\frac{m}{h} = 17{,}0016\frac{km}{h} = 4{,}7227\frac{m}{s}$$

ZADACI ZA VJEŽBU

1. Antarktik je približno polukružnog oblika s polumjerom od 2000 km. Srednja debljina ledenog pokrivača je 3000 m. Koliko leda sadrži taj kontinent?

   Rješenje:

$$V = \frac{r^2\pi h}{2} = \frac{\left(2\cdot 10^6\right)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 3000}{2} = 1{,}885\cdot 10^{16}\,m^3$$

$$m = \rho V = 920 kgm^{-3} \cdot 1{,}885 \cdot 10^{16}\,kg$$

2. Unutrašnje stube imaju gazište širine 23 cm, a svaka je stuba visoka 19 cm. Smatra se da bi spuštanje niz stube bilo sigurnije da je gazište širine 28 cm. Za određene stube ukupne visine 4,57 m, koliko dalje u sobi bi se stube protezale pri njihovu dnu nakon promjene gazišta?

   Rješenje:

$$\text{Broj stuba} = \frac{457cm}{19cm} = 24$$

Duljina koju zauzimaju $l_1 = 24\cdot 23 = 552$ cm

Duljina sigurnijih stuba $l_2 = 24\cdot 28 = 672$ cm

Povećanje duljine stuba $\Delta l = l_2 - l_1 = 120$ cm

3. Astronomska jedinica (AJ) je srednja udaljenost Zemlje od Sunca (1 AJ = $1{,}5\cdot10^8$ km). Brzina svjetlosti u vakuumu je c = $3\cdot10^8$ m s^{-1}. Izrazite je u AJ min^{-1}.

   Rješenje:

$$c = 3\cdot10^8 \text{ m s}^{-1} = 3\cdot10^5 \text{ km s}^{-1} = 3\cdot10^5 \frac{km}{\frac{\min}{60}} = 180\cdot10^5 \frac{km}{\min} = 180\cdot10^5 \frac{\frac{1AJ}{1{,}5\cdot10^8}}{\min}$$

$$c = \frac{180\cdot10^5\,AJ}{1{,}5\cdot10^8 \min} = 0{,}12AJ \min^{-1}$$

4. Ako pretpostavite da dužina dana jednoliko raste za 0,0010 s u jednom stoljeću, izračunajte ukupni učinak na mjerenje vremena tijekom 20. stoljeća.

5. Zemlja ima masu $5{,}98\cdot10^{24}$ kg. Srednja masa atoma od kojih je izgrađena Zemlja je 40 u. Koliko atoma sadrži Zemlja? (u = $1{,}6605402\cdot10^{-27}$ kg, m masa Zemlje, m_a masa atoma).

   Rješenje:

$$N = \frac{m}{m_a} = \frac{5{,}89\cdot10^{24}\text{ kg}}{40\text{ u}}\frac{5{,}89\cdot10^{24}\text{ kg}}{40\cdot1{,}6605402\cdot10^{-27}\text{ kg}} = 9\cdot10^{49}\text{ atoma}$$

6. Fina zrna pijeska plaže na Jadriji približno su kuglice polumjera 50 μm, a izgrađena su od silicijevog dioksida gustoće 2600 kg m^{-3}. Koliku masu pijeska treba uzeti da ukupna površina svih pojedinih zrnaca bude jednaka 6 m^2?

   Rješenje:

$$m = n\cdot m_1 = \frac{A}{A_1}\cdot\rho V_1 = \frac{A}{4r^2\pi}\cdot\rho\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{A\rho r}{3} = \frac{6m^2\cdot2600kgm^{-3}\cdot50\cdot10^{-6}m}{3} = 0{,}26kg$$

Tablica 1.3. Primjeri suvislih izvedenih jedinica SI-ja koje su izražene pomoću osnovnih jedinica

Izvedena veličina		**Izvedena suvisla jedinica SI-ja**	
Naziv	**Znak**	**Naziv**	**Znak**
ploština	A	kvadratni metar	m^2
obujam	V	kubični metar	m^3
brzina	v	metar u sekundi	m s^{-1}
ubrzanje	a	metar u sekundi na kvadrat	m s^{-2}
valni broj	k	recipročni metar	m^{-1}
gustoća, gustoća mase	ρ	kilogram po kubičnom metru	kg m^{-3}

površinska gustoća	ρ_A	kilogram po kvadratnom metru	kg m^{-2}
specifični obujam	v	kubični metar po kilogramu	m^3 kg^{-1}
gustoća struje	j	amper po kvadratnom metru	A m^{-2}
jakost magnetskog polja	H	amper po metru	A m^{-1}
množinska koncentracija	c	mol po kubičnom metru	mol m^{-3}
masena koncentracija	ρ , y	kilogram po kubičnom metru	kg m^{-3}
osvjetljenje	L_y	kandela po kvadratnom metru	cd m^{-2}
indeks loma	n	(broj) jedan	1
relativna permitivnost	μ_r	(broj) jedan	1

Tablica 1.4. Izvedene suvisle jedinice SI-ja s posebnim nazivima i znakovima

	Izvedena suvisla jedinica SI-ja			
Izvedena veličina	**Naziv**	**Znak**	**Izražena pomoću drugih jedinica SI-ja**	**Izražena pomoću osnovnih jedinica SI-ja**
ravninski kut	radijan	rad	1	m m^{-1} = 1
prostorni kut	steradijan	sr	1	m^2 m^{-2} = 1
frekvencija	herc	Hz		s^{-1}
sila	njutn	N		m kg s^{-2}
tlak, naprezanje	paskal	Pa	N/m^2	m^{-1} kg s^{-2}
energija, rad, količina topline	džul	J	N m	m^2 kg s^{-2}
snaga, izračeni tijek	vat	W	J/s	m^2 kg s^{-3}
električni naboj, količina elektriciteta	kulon	C		s A
razlika električnih potencijala, elektromotorna sila	volt	V	W/A	m^2 kg s^{-3} A^{-1}
kapacitet	farad	F	C/V	m^{-2} kg^{-1} s^4 A^2
električni otpor	om	Ω	V/A	m^2 kg s^{-3} A^{-2}
električna vodljivost	simens	S	A/V	m^{-2} kg^{-1} s^3 A^2
magnetski tijek	veber	Wb	V s	m^2 kg s^{-2} A^{-1}
gustoća magnetskog tijeka	tesla	T	Wb/m^2	kg s^{-2} A^{-1}
indukcija	henri	H	Wb/A	m^2 kg s^{-2} A^{-2}
Celzijeva temperatura	Celzijev stupanj	°C		K
svjetlosni tijek	lumen	lm	cd sr	cd
osvjetljenje	luks	lx	lm/m^2	m^{-2} cd
aktivnost radionuklida	bekerel	Bq		s^{-1}
apsorbirana doza, specifična (predana) energija, kerma	grej	Gy	J/kg	m^2 s^{-2}
ekvivalentna doza	sivert	Sv	J/kg	m^2 s^{-2}
katalitička aktivnost	katal	kat		s^{-1} mol

Tablica 1.5. Jedinice izvan SI-ja koje se upotrebljavaju sa SI-jem

Veličina	Naziv jedinice	Znak jedinice	Vrijednost u jedinicama SI-ja
vrijeme, trajanje	minuta	min	1 min = 60 s
	sat	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	dan	d	1 d = 24 h = 86 400 s
ravninski kut	stupanj	°	1° = (π/180) rad
	minuta	'	1' = (1/60)° = (π/10 800) rad
	sekunda	"	1" = (1/60)' = (π/648 000) rad
ploština	hektar	ha	1 ha = 1hm^2 = 10^4 m^2
obujam	litra	L, l	1 L = 1 dm^3 = 10^{-3} m^3
Masa	tona	t	1 t = 10^3 kg

Tablica 1.6. Grčki alfabet

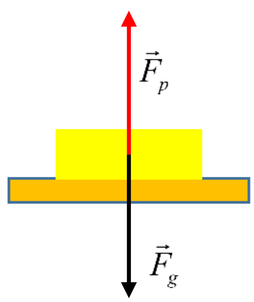
Ime slova	Veliko slovo	Malo slovo	Ime slova	Veliko slovo	Malo slovo
Alfa	Α	α	Ni	Ν	ν
Beta	Β	β	Ksi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Omikron	Ο	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	Ε	ε	Ro	Ρ	ρ
Zeta	Ζ	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	Η	η	Tau	Τ	τ
Theta	Θ	ϑ	Ipsilon	Υ	υ
Jota	Ι	ι	Fi	Φ	φ, ϕ
Kapa	Κ	κ	Hi	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	Μ	μ	Omega	Ω	ω

Intuitivni i formalni modeli

Kroz osnovnu i srednju školu učenici stječu znanja o pojavama i zakonitostima u prirodi. Dolaskom na studij iste te pojave i zakonitosti ponovo izučavaju. Međutim, nije neobično da njihove pretpostavke i hipoteze o tim pojavama još uvijek nisu ispravne, tako da na temelju intuicije pogrešno odgovaraju na pojedina pitanja. Navedimo nekoliko primjera.

Primjer 1. Kada se tijelo izbačeno vertikalno uvis nađe u najvišoj točki putanje, većina studenata bi odgovorila da je brzina tijela i njegova akceleracija jednaka nuli. Međutim, točan odgovor glasi: ukupna sila na tijelo u svim točkama putanje, uključujući i najvišu točku, je sila teža. Zbog toga tijelo i u najvišoj točki ima akceleraciju $\vec{g}$ čija je orijentacija uvijek prema središtu Zemlje.

Primjer 2. Kada se tijelo nalazi na podlozi, većina bi zaključila da je sila reakcije podloge $\vec{F}_p$ protusila sili teži $\vec{F}_g$ na tijelo. Međutim, točan odgovor glasi: silom i protusilom međudjeluju dva tijela, a ovdje je riječ o dvjema silama na tijelo. Ako podloga djeluje na tijelo silom reakcije, sila akcije je sila kojom tijelo djeluje na podlogu.



Slika 1. Uz primjer 2.

Ove nesvjesne hipoteze do kojih dolazimo na temelju intuicije nazivamo intuitivni modeli.

Pravilna objašnjenja gornjih primjera temelje se na fizikalnim zakonitostima i nazivamo ih formalni modeli. Promatranje i mjerenje moraju biti ključni test provjere modela koji dovode do stvaranja fizikalnih zakona.

2. KINEMATIKA

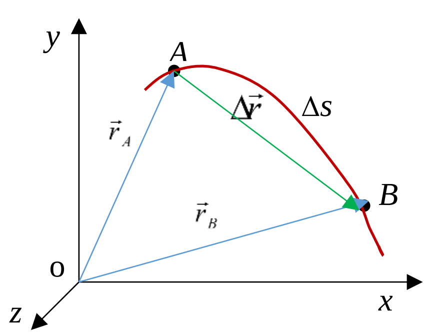
2.1. PRAVOCRTNA GIBANJA

Gibanje je jedno od bitnih svojstava tvari. Za neko tijelo kažemo da se giba ako mijenja svoj položaj u odnosu na neko drugo tijelo ili referentni sustav. Sustav u odnosu na koji promatramo gibanje tijela zove se referentni sustav.

Dio mehanike koji proučava gibanje tijela bez obzira na uzroke zove se kinematika. U kinematici gibanje opisujemo samo matematički, određujući put, pomak, brzinu i akceleraciju u ovisnosti o vremenu.

Pri opisivanju gibanja tijela u kinematici ograničit ćemo se na materijalnu točku, tj. zanemarit ćemo dimenzije tijela i čitavo tijelo predočiti jednom točkom u kojoj je skupljena sva masa tijela. Položaj tijela ovisi o izboru **referentnog sustava** (sustava u kojem opisujemo gibanje) koji proizvoljno odabiremo. Najčešće ga vežemo uz Zemlju, odnosno uz naš laboratorij (laboratorijski sustav). Položaj materijalne točke možemo odrediti pomoću njezinih koordinata ili radijusvektorom u pravokutnom Kartezijevom sustavu (slika 2.1.) Neka se tijelo pomaklo iz točke A u točku B. Trag koji materijalna točka ostavlja pri gibanju zovemo **putanja**. Udaljenost od točke A do točke B mjerena duž putanje po kojoj se tijelo giba je **put** Δs, a vektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ usmjeren od početnog položaja prema konačnom položaju, koji je iznosom jednak udaljenosti tih dvaju položaja, je **pomak**. Pomak je, zapravo, promjena vektora položaja. Put je skalarna veličina i gibanjem tijela uvijek raste, dok se pomak može povećavati i smanjivati tijekom gibanja. Put i pomak iznosom su jednaki ako tijelo ne mijenja orijentaciju gibanja.

Gibanja s obzirom na njihovu putanju mogu biti pravocrtna i krivocrtna.



Slika 2.1. Određivanje puta i pomaka materijalne točke

Pri opisivanju pravocrtnog gibanja, koordinatni sustav obično odabiremo tako da se njegova os x poklapa s pravcem gibanja, pa preostale dvije koordinate nisu potrebne. Tada se pomak obilježava s Δx i jednak je $\Delta x = x_k - x_p$ (slika 2.2.).

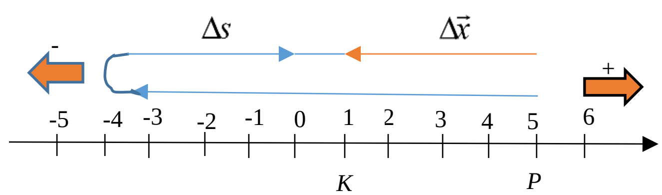
Primjer 1.

Neka se čovjek pomaknuo iz početnog položaja P s koordinatom x_p = 5 m do položaja x = - 4 m, a zatim do konačnog položaja K s koordinatom x_k = 1 m. Koliki su put i pomak čovjeka?

Put je: Δs = 9 m + 4 m = 13 m

Pomak je: $\Delta x = x_k - x_p$ = 1 m – 5 m = - 4 m

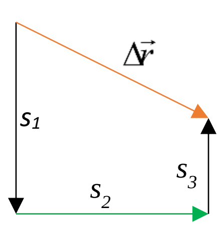
Pomak je vektorska veličina koja može imati pozitivnu i negativnu orijentaciju.



Slika 2.2. Put i pomak na istom pravcu

Primjer 2.

Student hoda 2 km u smjeru juga, zatim 2 km prema istoku i 1 km prema sjeveru. Koliki je ukupni prijeđeni put i koliko iznosi ukupni pomak?



$\Delta s = s_1 + s_2 + s_3$ = 2 km + 2 km + 1 km = 5 km

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1km)^2 + (2km)^2} = \sqrt{5}km$$

Slika 2.3. Put i pomak u prostoru

2.1.1. Nejednoliko pravocrtno gibanje

Kod pravocrtnog gibanja, vektor pomaka može imati pozitivnu i negativnu orijentaciju, pa ćemo njegovo vektorsko obilježje označavati pozitivnim i negativnim predznakom. Ako tijelo uvijek ima istu orijentaciju, tada je iznos pomaka jednak prijeđenom putu.

Problem brzine

Da bismo lakše objasnili pojam brzine, promatrat ćemo gibanje uvijek iste orijentacije, pri čemu se iznos puta i pomaka tijekom vremena mijenja na isti način.

Nije lako odgovoriti na pitanje što je brzina.

U *„The Feynman Lectures in Physics" R. P. Feynmana*, američkog fizičara-nobelovca nalazimo prepirku između vozačice i policajca u kojoj joj on pokušava objasniti da je vozila brzinom 90 km/h.

„Gospođo, Vi ste prekršili pravila vožnje kroz grad. Vozili ste brzinom od 90 km h^{-1}".

„Oprostite, to nije moguće. Kako sam mogla voziti 90 km h^{-1} kad vozim tek 7 minuta"?

„Radi se o tome, gospođo, da biste za 1 h prešli 90 km kad biste nastavili voziti na isti način".

„Kad bih ja nastavila voziti kako sam vozila još cijeli sat, naletjela bih na zid na kraju ulice"!

„Vaš je brzinomjer pokazivao 90 km h^{-1}"!

„ Moj je brzinomjer pokvaren i odavno ne radi."

Vidimo da policajac nije uspio objasniti vozačici što je to brzina od 90 km h^{-1}. Pokušat ćemo mi to učiniti.

Kada automobil prijeđe put (Šibenik - Split) od 90 km za 1,5 h, njegova je srednja brzina 60 km h^{-1}. Znači li to da je ta brzina bila stalna na cijelom putu? Svakako da stalno nije iznosila 60 km h^{-1}. Kada je ulazio u zavoj, morao je smanjiti brzinu; na pravocrtnom dijelu ceste povećavao ju je; kada je naišao na semafor, morao je automobil zaustaviti itd. Znači, brzina se tijekom putovanja mijenjala. Takvo gibanje zovemo nejednoliko gibanje. Pri nejednolikom pravocrtnom gibanju iste orijentacije, orijentacija brzine stalna je, ali se njezin iznos tijekom vremena stalno mijenja, pa nam je to gibanje najlakše opisati srednjom brzinom po putu ili po pomaku. Pri gibanju tijela nepromjenjive orijentacije, iznosi srednjih brzina po putu i pomaku jednaki su jer se tada iznosi puta i pomaka mijenjaju na isti način i u tom slučaju govorimo samo o srednjoj brzini.

Prosječnu vrijednost dobili smo dijeljenjem prijeđenog puta ili pomaka vremenom provedenim na tom putu. Na sličan način možemo dobiti srednju brzinu na nekom manjem dijelu puta.

Smanjujemo li dio puta, odnosno promatrajući sve kraće vremenske intervale, očekujemo da će srednja brzina biti sve bliža **trenutačnoj brzini.**

Graf pomaka, odnosno puta kao funkcije vremena jest neka krivulja (sl. 2.4.). Ako je u trenutku t_1 položaj čestice određen koordinatom x_1, a u trenutku t_2 koordinatom x_2, tada je srednja brzina u tom vremenskom intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ u kojem je automobil promijenio položaj za $\Delta x = x_2 - x_1$:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Srednja brzina u nekom vremenskom intervalu određena je nagibom (koeficijentom smjera, tangensom kuta koji pravac, koji prolazi točkama A i B, zatvara s osi t, tj. tgα) pravca (sekantom) koji prolazi točkama A i B (sl. 2.4. a, b,).

Prava ili trenutačna brzina izračuna se tako da zamislimo da je točka B sve bliža točki A i nađemo graničnu vrijednost prema kojoj teži trenutna brzina:

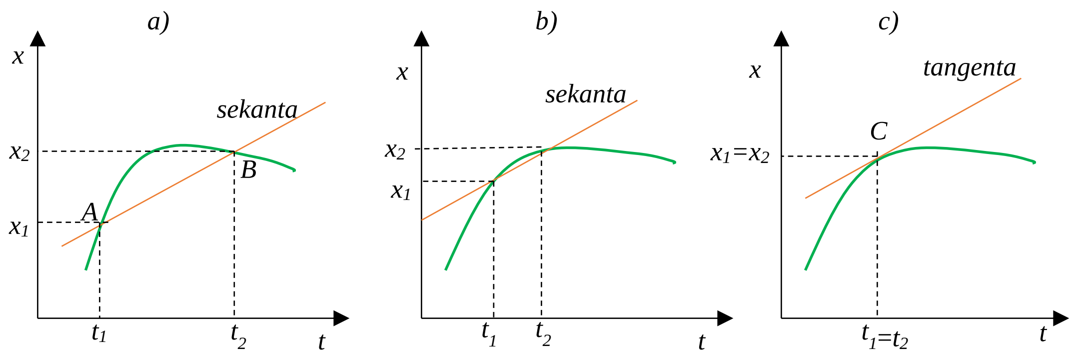
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$\dot{x}$ je oznaka za prvu derivaciju puta po vremenu $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right)$.

Prema tome, **trenutačna brzina** (brzina) je prva derivacija koordinate položaja po vremenu. Trenutačna brzina u točki C određena je nagibom tangente u toj točki.

Ovako definirana brzina ima jednak iznos po putu i po pomaku jer su iznosi puta i pomaka u jako malom vremenskom intervalu jednaki ($dx = ds$), pa vrijedi:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}$$



Slika 2.4. Uz definiciju trenutačne brzine

Jedinica SI-ja za brzinu je metar u sekundi ($m\ s^{-1}$). U praksi se često upotrebljava $km\ h^{-1}$ i čvor.

$$kmh^{-1} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s},$$

$$1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h},$$

$$\check{c}vor = 1{,}852\frac{km}{h} = 0{,}514\frac{m}{s},$$

čvor = morska milja na sat,

U USA milja na sat =1,609 km h^{-1} = 0,447 m s^{-1}.

Rast ljudske kose	$3\cdot10^{8}$ m s^{-1}
Rast biljaka	$2\cdot10^{-7}$ m s^{-1}
Krv u žilama	0,07 m s^{-1}
Pješak	1,4 m s^{-1} (5 km h^{-1})
Trkač	10 m s^{-1}
Biciklist	6 m s^{-1} (20 km h^{-1})
Automobil	45 m s^{-1} (160 km h^{-1})
Zvuk u zraku	340 m s^{-1}
Točka na ekvatoru u odnosu na prema Zemlji mirnog promatrača u svemiru	465 m s^{-1}
Puščani metak	800 m s^{-1}
Mjesec oko Zemlje	1 000 m s^{-1}
Zemlja oko Sunca	$3\cdot10^{4}$ m s^{-1}
Svjetlost u vakuumu	$3\cdot10^{8}$ m s^{-1}

Tablica 2.1. Neke tipične brzine

Primjer 2.1. Tijelo se giba pravocrtno po zakonu $x(t) = 10ms^{-2}t^{2}$. Kolika je trenutna brzina nakon prve dvije sekunde? Kolika je srednja brzina za vrijeme prve 4 s?

Rješenje:

Pravilo za deriviranje: $(x^{n})' = n\cdot x^{n-1}$

Kako je trenutna brzina $v = \dot{x}$, deriviranjem dobijemo $v = 20ms^{-2}t$. Za t = 2 s, dobivamo da je:

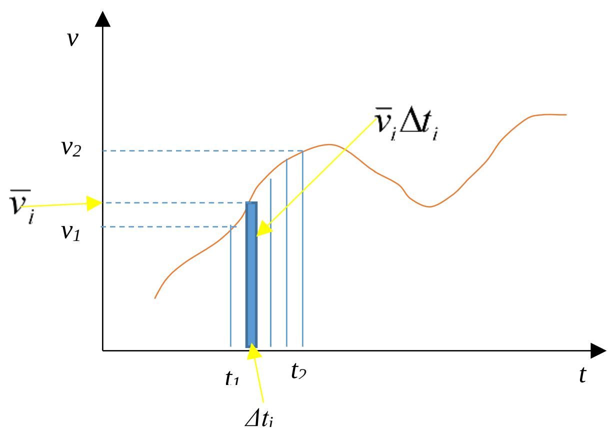
$$v = 20ms^{-2}\cdot 2s = 40 \text{ m s}^{-1}$$

Srednja brzina je:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10ms^{-2}t^2}{\Delta t} = \frac{10ms^{-2}(4s)^2}{4s} = 40\,\text{m s}^{-1}$$

2.1.2. Izračunavanje puta iz *v, t* grafa

Nacrtajmo *v, t* graf nejednolikog pravocrtnog gibanja i odredimo prevaljeni put u vremenskom intervalu od t_1 do t_2.



Slika 2.5. *v, t* graf nejednolikog gibanja

Na slici 2.5. prikazan je *v, t* graf nejednolikog gibanja. Vremenski interval od t_1 do t_2 podijelimo na kraće vremenske intervale Δt_i. Svakom vremenskom intervalu odgovara srednja brzina $\bar{v}_i$. Put prijeđen u vremenskom intervalu Δt_i približno je jednak površini pravokutnika $\bar{v}_i \cdot \Delta t_i$. Zbroj površina svih pravokutnika u intervalu od t_1 do t_2 predstavlja približnu vrijednost puta u tom vremenskom intervalu i pišemo:

$$s \approx \sum_i \bar{v}_i \cdot \Delta t_i$$

Točan izraz za prijeđeni put u intervalu od t_1 do t_2 jest:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum \bar{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Put u intervalu od t_1 do t_2 jest granična vrijednost zbroja površina svih pravokutnika kada $\Delta t \to 0$. Tada će srednja brzina u danom intervalu težiti trenutnoj brzini, a prevaljeni put jednak je vremenskom integralu brzine.

Dakle, prevaljeni put po iznosu je jednak površini ispod krivulje $v(t)$ u vremenskom intervalu od t_1 do t_2, što daje vremenski integral brzine.

Primjer 2.2.

Izračunajte put koji prijeđe automobil između 4. s i 9. s ako mu se brzina mijenja prema izrazu $v = 3\ \mathrm{m\ s^{-2}}\ t$.

Rješenje

$v = 3\ \mathrm{m\ s^{-2}}\ t$

$s = ?$

Put ćemo izračunati integriranjem. Sjetimo se pravila integriranja: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$;

osnovna formula za određeni integral: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$;

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_4^9 3ms^{-2}tdt = \frac{3ms^{-2}t^2}{2}\Big|_4^9 = \frac{3ms^{-2} \cdot 9^2 s^2}{2} - \frac{3ms^{-2} 4^2 s^2}{2} = \frac{3}{2}m(9^2 - 4^2) = \frac{3}{2}m \cdot 65$$

$$s = 97{,}5m$$

2.1.3. Akceleracija

Ako se tijelo giba nejednoliko, brzina mu se neprestano mijenja. Promjenu brzine opisujemo akceleracijom ili ubrzanjem. Omjer promjene brzine i pripadnog vremenskog intervala zovemo srednja akceleracija $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Trenutačna akceleracija ili samo akceleracija a jest granična vrijednost srednje akceleracije (slika 2.4.):

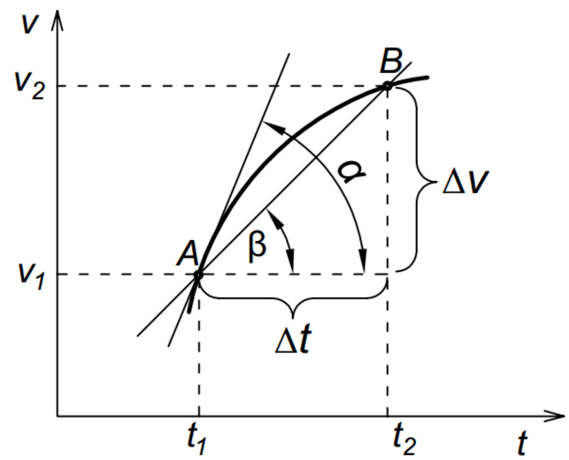
$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Kako je $v = \dfrac{dx}{dt}$, možemo pisati:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Akceleracija je prva derivacija brzine po vremenu ili druga derivacija koordinate položaja (puta) po vremenu. Jedinica za akceleraciju je (m s^{-2}).



Slika 2.6. *v*, *t* graf ubrzanog gibanja (uz definiciju akceleracije)

Srednja akceleracija $\bar{a}$ određena je nagibom sekante $\overline{AB}$, tj. tgβ, a akceleracija je određena nagibom tangente na krivulju u točki A, tj. tgα.

Iz zadane akceleracije možemo odrediti brzinu integriranjem:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow dv = adt, \qquad \text{pa je}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \qquad v - v_0 = \int_0^t adt \qquad v = v_0 + \int_0^t adt \qquad v = v_0 + at$$

v_0 je brzina u trenutku $t = 0$.

Brzina je vremenski integral akceleracije.

Akceleracija može biti pozitivna $a > 0$, negativna $a < 0$, stalna a = konst. i promjenljiva $a \neq konst.$ Ako je $a > 0$, brzina se povećava; ako je $a < 0$, brzina se tijekom vremena smanjuje. Negativna akceleracija još se zove usporenje ili deceleracija.

Primjer 2.3. Materijalna točka se giba tako da za brzinu vrijedi: $v = 5t^2 - 2t + 3$(m s^{-1}). Odredite kako se mijenja ubrzanje i put materijalne točke u ovisnosti o vremenu ako je do trenutka mjerenja prevalila put od 10 m. Izračunajte prijeđeni put, brzinu i ubrzanje u trenutku t = 5 s.

Rješenje:

Ubrzanje u ovisnosti o vremenu:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(5t^2 - 2t + 3)}{dt} = 10t - 2$$

Ubrzanje u t = 5 s:

$$a(5) = 48 \text{ m s}^{-2}$$

Put u ovisnosti o vremenu:

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = vdt \rightarrow s = \int vdt = \int \left(5t^2 - 2t + 3\right)dt$$

$$s = \frac{5t^3}{3} - t^2 + 3t + C$$

Početni uvjeti: $t_0 = 0$, s_0 = 10 m:

$$s_0 = \frac{5t_0^3}{3} - t_0^2 + 3t_0 + C\,;\ 10 = \frac{5 \cdot 0^3}{3} - 0^2 + 3 \cdot 0 + C\,;\ C = 10$$

$$s = \frac{5t^3}{3} - t^2 + 3t + 10$$

Prijeđeni put za u trenutku t = 5 s:

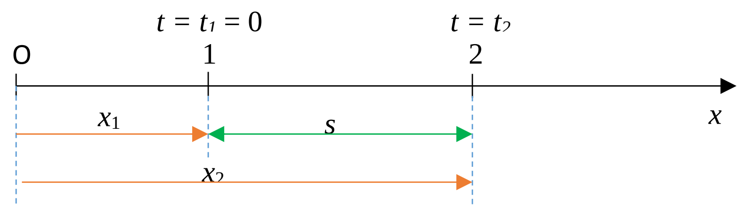
$$s(5) = \frac{5 \cdot 5^3}{3} - 5^2 + 3 \cdot 5 + 10 \qquad s(5) = 208{,}33 \text{ m}$$

Trenutačna brzina u petoj sekundi:

$$v = 5t^2 - 2t + 3(\text{m s}^{-1}) \qquad v(5) = 118 \text{ m s}^{-2}$$

2.1.4. Jednoliko gibanje po pravcu

Jednoliko gibanje po pravcu jest najjednostavnije gibanje. Neka je taj pravac po kojem se tijelo giba os *x* (slika 2.5.)



Slika 2.7. Jednoliko gibanje po pravcu

Položaj materijalne točke određujemo u odnosu na ishodište (koordinatni početak) O (referentna točka). Ako se materijalna točka nalazi desno od ishodišta, položaj je pozitivan, a ako je lijevo, položaj je negativan. Pomak materijalne točke također može biti pozitivan (kada se giba udesno) i negativan (kada se giba ulijevo).

Moramo razlikovati put od pomaka. Put je uvijek pozitivan. Kako smo već rekli, kod pravocrtnog gibanja s istom orijentacijom, pomak je jednak prijeđenom putu.

Neka se materijalna točka u trenutku $t = t_1 = 0$ nalazi u položaju 1 s koordinatom x_1, a u nekom drugom trenutku t_2 u položaju 2 s koordinatom x_2. Kako je gibanje jednoliko, znači da tijelo u jednakim vremenskim intervalima prevaljuje jednake putove pa je brzina uvijek stalna, tj. trenutačna brzina jednaka je srednjoj brzini, a akceleracije nema (slika 2.6.). Omjer prijeđenog puta $s = x_2 - x_1$ i za to potrebnog vremena $t = t_2 - t_1$ konstantan je i zove se brzina:

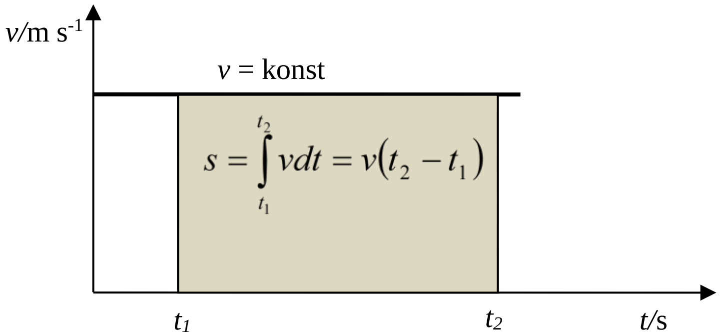
$$v = \bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{s}{t} = konst. \qquad a = \bar{a} = 0$$

$$v = \frac{s}{t} \qquad s = vt \qquad t = \frac{s}{v}$$

Ako je tijelo do početnog trenutka prešlo put s_0, tada je: $s = s_0 + vt$ što predstavlja **zakon jednolikog gibanja.**

Jednoliko pravocrtno gibanje pri kojem je brzina konstantna po iznosu i orijentaciji možemo izraziti vektorskom jednadžbom: $\vec{v} = konst.$

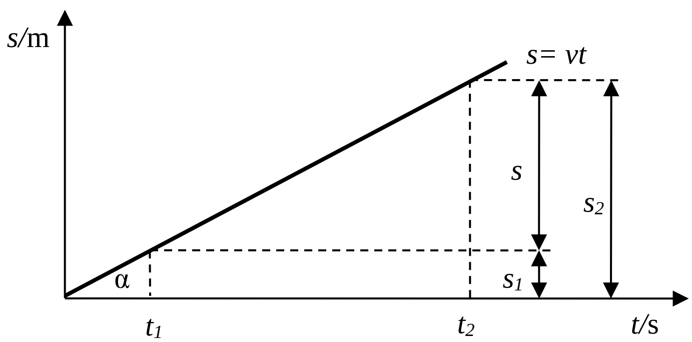
Grafički prikaz brzine kao funkcije vremena jest pravac paralelan s osi *t*, jer je *v* za bilo koji *t* jednako i zove se *v*, *t* graf (slika 2.8.). Površina ispod tog pravca *v* predstavlja prijeđeni put za vrijeme *t* (u našem slučaju, osjenčani pravokutnik na slici 2.8.)



$$v = \frac{ds}{dt} = konst.$$

Slika 2.8. *v, t* graf jednolikog pravocrtnog gibanja

Slično se ovisnost puta o vremenu može prikazati *s, t* grafom (slika 2.9.), pomaka o vremenu *x, t* grafom i akceleracije o vremenu *a, t* grafom (slika 2.10.).

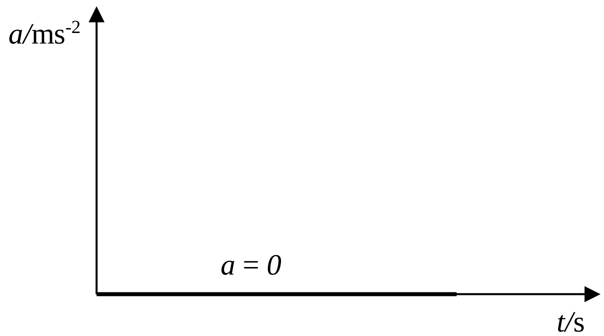


Slika 2.9. *s, t* graf jednolikog pravocrtnog gibanja

$$ds = vdt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} vdt = \text{površina ispod pravca } v = \text{konst.}$$

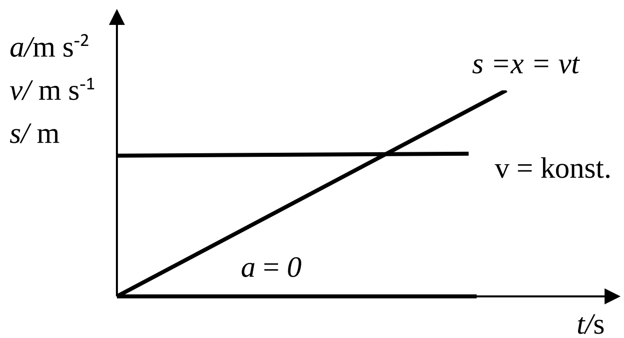
$$tg\alpha = \frac{s}{t} = v$$



$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Slika 2.10. *a*, *t* graf jednolikog pravocrtnog gibanja

Radi uštede i preglednosti dijagrame crtamo na jednom dijagramu (slika 2.11.)



Slika 2.11. Grafički prikaz ovisnosti puta, pomaka, brzine i akceleracije o vremenu pri jednolikom pravocrtnom gibanju

Primjer 2.4. Koliko je sekundi opterećen most dugačak 120 m ako preko njega prolazi vlak dugačak 100 m brzinom 80 km/h?

Rješenje:

s_m = 120 m

l_v = 100 m

$\underline{v = 80 \text{ km h}^{-1}}$

t = ?

Vlak opterećuje most od trenutka nailaska lokomotive na most, pa sve dok zadnji vagon ne napusti most, stoga je duljina puta jednaka:

$$s = s_m + l_v = 120 + 100 = 220 \text{ m}$$

Vlak će ovaj put prijeći za:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{220m}{\frac{80}{3{,}6}ms^{-1}} = 9.9s \approx 10s$$

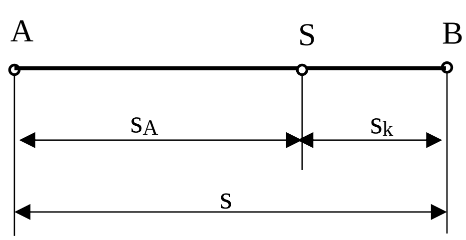
Primjer 2.5. Most Krka je armiranobetonski lučni most preko rijeke Krke kod Skradina, na dionici autoceste A1 Skradin – Šibenik. Početak mosta od Skradina prema Šibeniku označimo točkom A, a početak od Šibenika točkom B. Iz točaka A i B istodobno su krenuli automobil i kamion jedan drugome ususret gibajući se jednoliko pravocrtno. Automobil je udaljenost od točke A do točke B prešao za 12 s a kamion od B do A za 24 s. Kada su se susreli automobil i kamion na mostu?

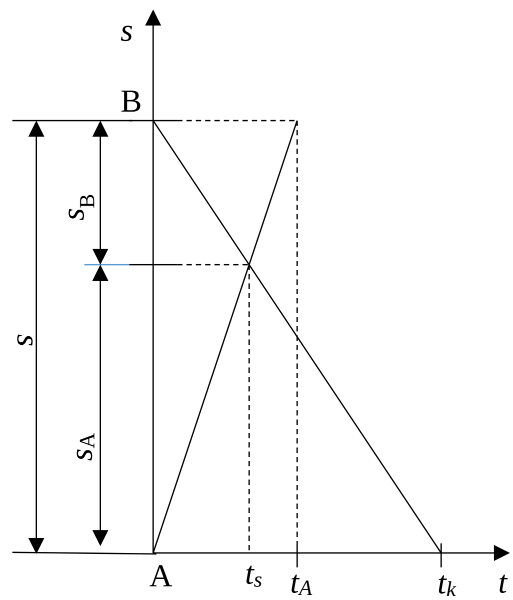
Rješenje:

$t_A = 12$ s

$t_K = 24$ s

$t_s = ?$





Slika 2. 11. Uz rješenje primjera 2.5.

Duljina mosta je put kojeg su prevalili automobil i kamion: $s = s_{AB} = v_A t_A = s_{BA} = v_k t_k$

također je duljina mosta jednaka zbroju putova automobila i kamiona do točke susreta S:

$$s = s_A + s_K$$

$$s = v_A t_s + v_K t_s$$

Vrijeme susreta je t_s:

$$t_s = \frac{s}{v_A + v_K}$$

$$t_s = \frac{v_A t_A}{v_A + \frac{v_A t_A}{t_K}}$$

$$t_s = \frac{t_A}{1 + \frac{t_A}{t_K}}$$

$$t_s = 8\,\mathrm{s}$$

2.1.5. Jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno pravocrtno gibanje

Neka se tijelo giba u koordinatnom sustavu po osi x i neka je u trenutku $t = 0$ u točki x_0 te ima početnu brzinu v_0, njegovu brzinu nakon vremena t dobit ćemo po formuli:

$v = v_0 + \int_0^t a dt = v_0 + at$, što dobivamo integriranjem iz $dv = adt$

Integriranjem brzine dobivamo položaj tijela x u trenutku t:

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)dt = x_0 + \int_0^t (v_0 + at)dt \qquad \rightarrow \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

gdje je x_0 položaj tijela u početnom trenutku $t = 0$.

Kako je put koji tijelo prevali za vrijeme t: $s = x - x_0$, iz gornjeg izraza dobivamo: $s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$

.

Iz $s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ i $v = v_0 + at$ dobivamo vezu između puta, brzine i akceleracije:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \qquad \text{ili} \qquad v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$$

Kod ovog gibanja vektor brzine $\vec{v}$ ima istu orijentaciju, dok vektor akceleracije $\vec{a}$ može biti iste ili suprotne orijentacije orijentaciji brzine. Ako $\vec{a}$ ima orijentaciju brzine, gibanje je ubrzano, a ako je $\vec{a}$ suprotne orijentacije od orijentacije brzine, gibanje je usporeno.

Napomenimo da se za jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno pravocrtno gibanje koristimo istim izrazima, s tim da pri usporenom gibanju akceleraciju uvrštavamo s negativnim predznakom.

Ako se ograničimo isključivo na gibanje sa stalnim ubrzanjem kod kojeg je $a = \bar{a}$ u svakom trenutku i ako pođemo od formule za srednje ubrzanje pri čemu je $v_1 = v_0$ u početnom trenutku $t_1 = 0$, a $v_2 = v$ u nekom kasnijem trenutku $t_2 = t$, možemo pisati:

$$a = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v - v_0}{t} \qquad \rightarrow \qquad v = v_0 + at$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x - x_0}{t} \qquad \rightarrow \qquad x = x_0 + \bar{v}t$$

Za jednoliko ubrzano gibanje srednju brzinu možemo računati pomoću izraza:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \text{ pa dobivamo: } \quad \bar{v} = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2}$$

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t = x_0 + \frac{v_0 + v_0 + at}{2}t = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Primjer 2.6. Most Krka je armiranobetonski lučni most preko rijeke Krke kod Skradina, na dionici autoceste A1 Skradin – Šibenik. Početak mosta od Skradina prema Šibeniku označimo točkom A, a početak od Šibenika točkom B. Iz točaka A i B istodobno su krenuli automobil i kamion jedan drugome ususret. Automobil je krenuo iz točke A prema točki B iz stanja mirovanja akceleracijom 6 m s^{-2}, a iz točke B prema točki A krenuo je kamion stalnom brzinom 72 km h^{-1}. Odredite točku mimoilaženja C automobila i kamiona na mostu ako su točke A i B udaljene 500 m.

Rješenje:

$a_A = 6$ m s^{-2}

$v_B = 72$ km h^{-1}

$s_{AB} = 500$ m

$s_{AC} = ?$

$$s_{AB} = s_{AC} + s_{BC}$$

$$s_{AB} = \frac{a_A t^2}{2} + v_B t$$

$$a_A t^2 + 2v_B t - 2s_{AB} = 0$$

$$6t^2 + 2 \cdot 20t - 2 \cdot 500 = 0$$

$$3t^2 + 20t - 500 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-500)}}{2 \cdot 3}$$

$$t_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 6000}}{6}$$

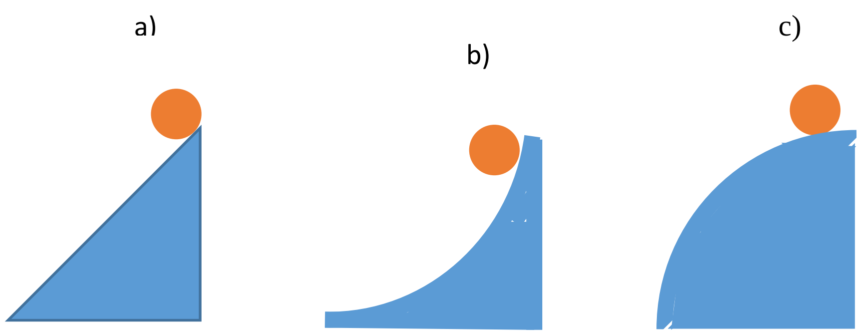
$$t_{1,2} \frac{-20 \pm 80}{6}$$

$$t = 10\,\mathrm{s}$$

$$s_{AC} = \frac{a_A t}{2} = \frac{6 \cdot 10^2}{2} = 300\,\mathrm{m}$$

$$s_{BC} = v_k t = 20 \cdot 10 = 200\,\mathrm{m}$$

Primjer 2.7. Opišite gibanje kuglice na nizbrdicama bez trenja. Kako se mijenjaju brzina i akceleracija?



a) $a = g\frac{h}{l}$, $v > v_0$

a = konst

b) $v > v_0$

$a < a_0$

c) $v > v_0$

$a > a_0$

Slika 2.12. Gibanje nizbrdicom

Primjer 2.8. Nacrtajte *x*, *t* graf, *s*, *t* graf, *v*, *t* graf i *a*, *t* graf gibanja dizala. Dizalo prvu sekundu miruje, pa se dvije sekunde giba jednoliko ubrzano akceleracijom 2 m s^{-2}, zatim se do kraja osme sekunde giba stalnom brzinom koju je postiglo na kraju treće sekunde, jednoliko usporava akceleracijom -4 m s^{-2} do zaustavljanja kroz sljedeću sekundu i jednu sekundu miruje.

Rješenje:

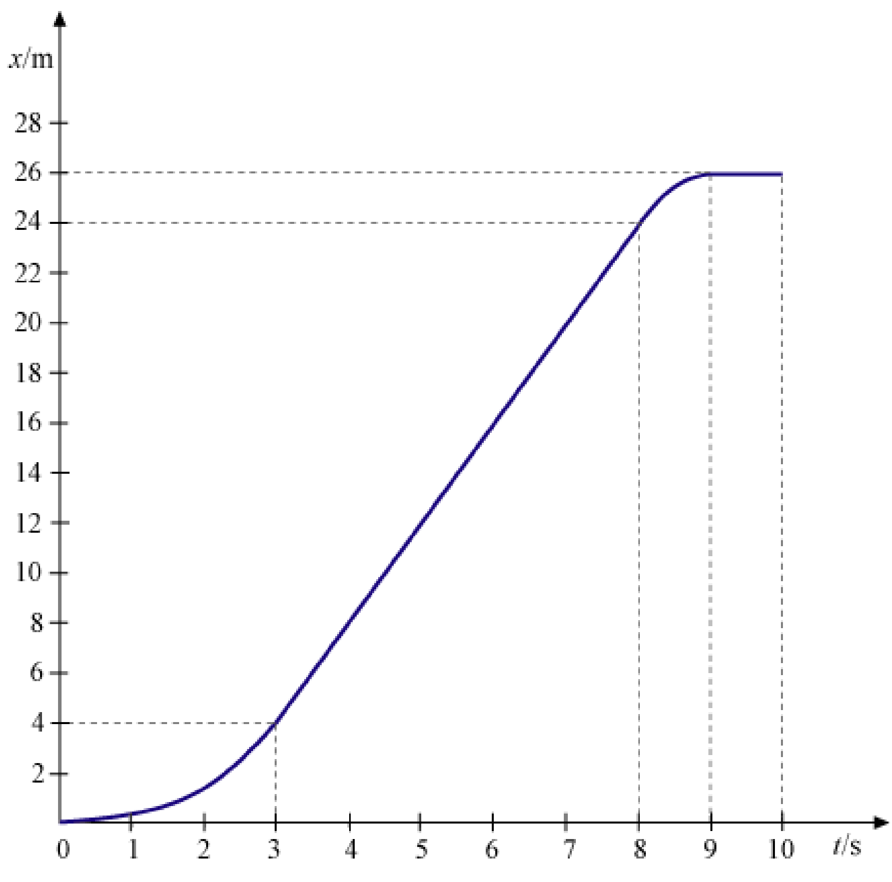
$x_{0-1} = 0 \text{ m}$ $\qquad$ $v_{0-1} = 0 \text{ m s}^{-1}$

$x_{0-3} = x_{0-1} + \frac{at_{1-3}^2}{2} = 0 + \frac{2 \cdot 2^2}{2} = 4 \text{ m}$ $\qquad$ $v_3 = at_{1-3} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m s}^{-1}$

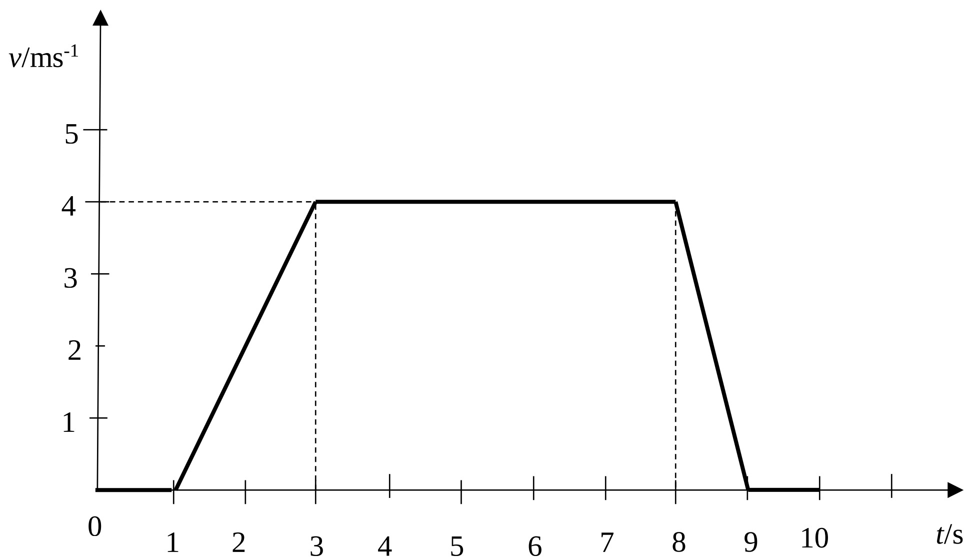
$x_{0-8} = x_{0-3} + v_3(t_8 - t_3) = 4 + 4 \cdot 5 = 24 \text{ m}$ $\qquad$ $v_{3-8} = 4 \text{ m s}^{-1}$

$x_{0-9} = x_{0-8} - \frac{a_2 t_{8-9}^2}{2} = 24 - \frac{(-4) \cdot 1^2}{2} = 26 \text{ m}$ $\qquad$ $v_9 = 0 \text{ m s}^{-1}$

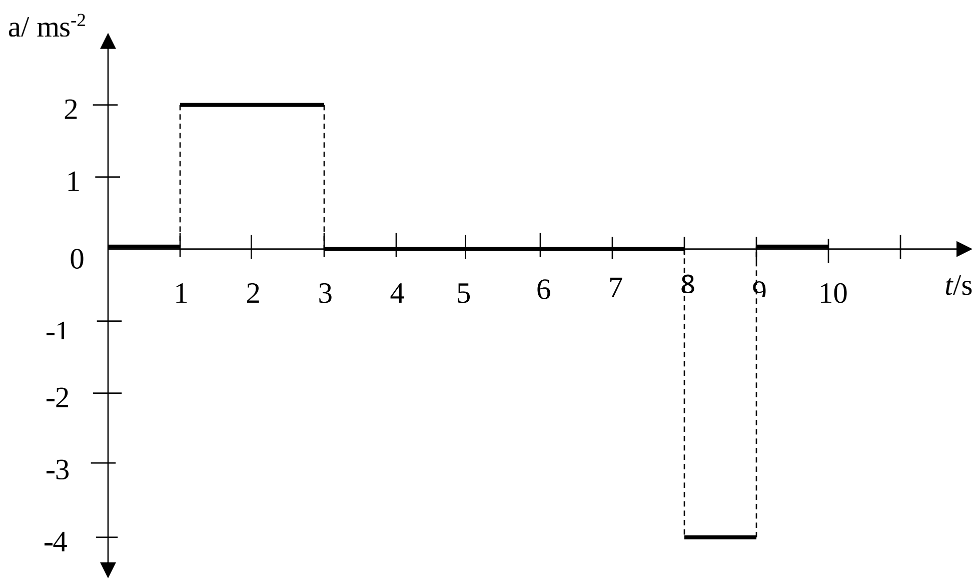
$x_{0-10} = 26 \text{ m}$ $\qquad$ $v_{9-10} = 0 \text{ m s}^{-1}$



Slika 2.13. *x*, *t* graf



Slika 2.14. *v*, *t* graf



Slika 2.15. *a*, *t* graf

Primjer 2.9. Automobil se giba ravnom cestom stalnom akceleracijom 3 m s^{-2}. U trenutku kada mu je brzina 10 m s^{-1}, on prestigne kamion koji upravo kreće i ubrzava akceleracijom 5 m s^{-2}. U kojem će trenutku kamion prestići automobil? Koliki će put do tog trenutka prijeći automobil i kamion?

Rješenje:

$a_A = 3$ m s^{-2}

$v_A = 10$ m s^{-2}

$a_K = 5$ m s^{-2}

t = ?

$s_A = s_K = ?$

$$s_A = v_A t + \frac{a_A t^2}{2}$$

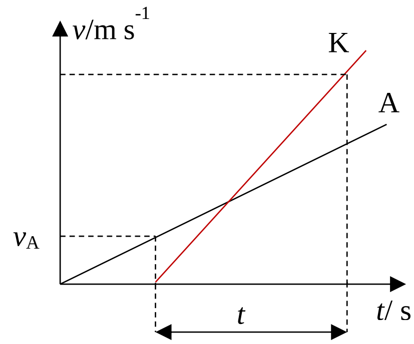
$$s_K = \frac{a_K t}{2}$$

$$s_A = s_K$$

$$v_A t + \frac{a_A t^2}{2} = \frac{a_K t^2}{2}$$

$$t = \frac{2v_A}{a_K - a_A} = 10 \text{ s}$$

$$s_A = s_K = 250 \text{ m}$$



Slika 2.16. Uz primjer 2.9.

Primjer 2.10. Čovjek trči brzinom 14,4 km/h da bi stigao na tramvaj koji stoji. U trenutku kada je čovjek udaljen 4 m od vrata tramvaja, on krene jednoliko ubrzano. Kolika je akceleracija tramvaja ako je čovjeku potrebno 2 sekunde da stigne vrata tramvaja?

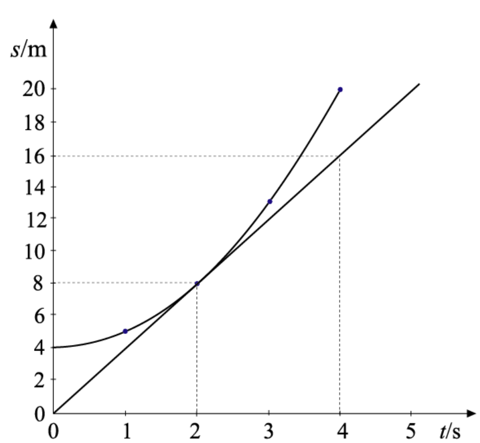
Rješenje:

$v_č = 14{,}4$ km h^{-1} = 4 m s^{-1}

$s_0 = 4$ m

$t = 2$ s

$a = ?$



Iz s, t grafa:

$$s_č = s_t$$

$$v_č t = s_0 + \frac{a}{2} t^2$$

$$\frac{a}{2} t^2 = v_č t - s_0$$

$$a = \frac{2(v_č t - s_0)}{t^2}$$

$$a = 2 \text{ m s}^{-2}$$

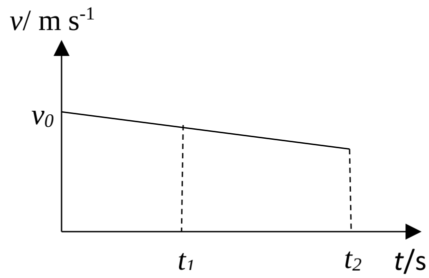
Slika 2.17. *s, t* graf gibanja čovjeka i tramvaja

Primjer 2.11. Ulazeći u stanicu vlak počne jednoliko usporavati. Izračunajte akceleraciju i početnu brzinu vlaka ako prvih 50 m prijeđe za 5 s, a idućih 50 m za 7 s.

Rješenje:

$s_1 = 50$ m
$s_2 = 100$ m
$t_1 = 5$ s
$t_2 = 12$ s

a = ?, v_0 = ?



Slika 2.18. *v, t* graf gibanja vlaka

Iz *v, t* grafa je vidljivo:

Put vlaka nakon 5 s kočenja: $s_1 = v_0 t_1 - \frac{a}{2} t_1^2$

Ukupni put nakon 12 s kočenja: $s_2 = v_0 t_2 - \frac{a}{2} t_2^2$

Rješavajući ovaj sustav jednadžbi od dvije nepoznanice dobijemo: $a = \frac{10}{21} = 0.48 \text{ m s}^{-2}$; $v_0 = 11{,}19 \text{ m s}^{-1}$.

2.1.6. Slobodni pad

Slobodni pad primjer je jednolikog ubrzanog pravocrtnog gibanja vrlo blizu Zemljine površine. Ako neko tijelo ispustimo da slobodno pada, ono će se gibati jednoliko ubrzano akceleracijom g koju mu daje Zemljina sila teža.

Izvedimo pokus tako da u staklenu cijev stavimo metalnu kuglicu, komadić papira i perce te ju zatvorimo i preokrenemo. Vidjet ćemo da će metalna kuglica najbrže pasti, papirić sporije, a perce najsporije. Isisamo li iz cijevi zrak i pokus ponovimo, vidjet ćemo da će sva tri predmeta pasti istovremeno. Zaključujemo da u vakuumu sva tijela padaju jednakom akceleracijom, bez obzira na njihovu masu, oblik i veličinu.

Proučavajući slobodni pad zanemarit ćemo otpor zraka i pretpostaviti da sva tijela s iste visine padaju jednako dugo. Zaključujemo da onda sva tijela imaju jednaku akceleraciju. Uzrok slobodnom padu na zemljinoj površini jest sila teža, pa se zbog toga tijela gibaju jednoliko ubrzano. Ubrzanje sile teže ovisi o zemljopisnoj širini i nadmorskoj visini. Tako je na 45° zemljopisne širine (to je naša zemljopisna širina) na razini mora oko 9,81 m s^{-2}, na polu g_p = 9,83 m s^{-2}, na ekvatoru g_e = 9,78 m s^{-2}. Radi bržeg računanja, ako se ne traži posebna točnost, za akceleraciju slobodnog pada (akceleraciju sile teže) možemo uzeti g = 10 m s^{-2}.

Zaključujemo da je slobodni pad jednoliko ubrzano gibanje s akceleracijom $a = g$ i bez početne brzine $v_0 = 0$, pa iz izraza koje smo koristili kod jednolikog ubrzanog pravocrtnog gibanja dobivamo izraze za slobodni pad:

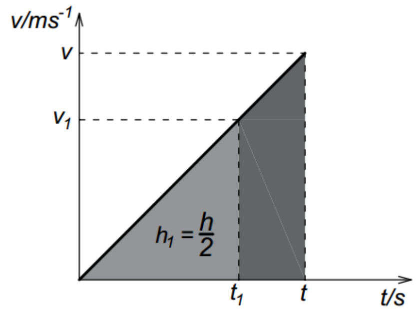
$$v = gt \qquad s = h = \frac{g}{2}t^2 \qquad v^2 = 2gh \qquad s = h = \frac{vt}{2}$$

Primjer 2.12.

Tijelo slobodno pada te u posljednjoj sekundi prevali pola puta pri padanju. S koje visine tijelo pada i koliko dugo traje padanje?

Rješenje:

$\Delta t = 1$ s
$g = 10 \text{ m s}^{-2}$
$h = ?$
$t = ?$



Slika 2.19. a) *v*, *t* graf slobodnog pada kamena

Iz *v*, *t* grafa vidljivo je da je:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2} \qquad h_1 = \frac{h}{2} = \frac{g}{2}(t - \Delta t)^2$$

Put padanja je:

$$h = \frac{g}{2}t^2$$

Rješavanjem sustava od ova dva izraza dobivamo vrijeme trajanja slobodnog pada:

$$\frac{g}{2}t^2 = g(t - \Delta t)^2 \Big| \sqrt{}$$

$$t = \sqrt{2}(t - \Delta t)$$

$$\sqrt{2}t - t = \sqrt{2}\Delta t$$

$$t = \frac{\sqrt{2}\Delta t}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}\Delta t(\sqrt{2}+1) = (2+\sqrt{2})\Delta t$$

$$t = (2+1{,}41)\cdot 1\text{s}$$

$$t = 3{,}41 \text{ s}$$

Visina s koje je tijelo počelo padati: $h = \frac{g}{2}t^2 = 57\,\text{m}$

Primjer 2.13. Izračunajte visinu s koje je tijelo pušteno da slobodno pada ako posljednjih h_1 = 15 m prijeđe za t_1 = 0,4 s?

Rješenje:

h_1 = 15 m

t_1 = 0,4 s

h = ?

$$h_1 = \frac{gt^2}{2} - \frac{g}{2}(t-t_1)^2$$

$$t = \frac{h_1}{gt_1} + \frac{t_1}{2} \qquad t = 4{,}02s$$

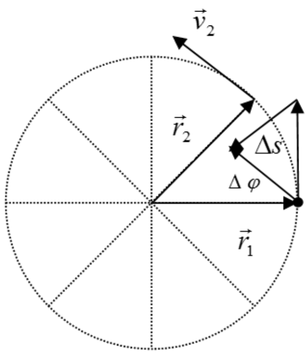
$$h = \frac{gt^2}{2} \qquad h = 79{,}37m$$

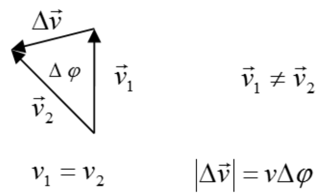
2.2. GIBANJE PO KRIVULJI

U svakidašnjem životu, gibanje po krivulji (zakrivljenom stazom) češće je nego pravocrtno gibanje. Primjeri su takvog gibanja: gibanje po kružnici, kosi hitac i horizontalni hitac.

2.2.1. Jednoliko gibanje po kružnici

Ako se materijalna točka giba tako da joj akceleracija i brzina zatvaraju neki kut, tj. nisu na istom pravcu, ona se giba po zakrivljenoj putanji. Najjednostavnije krivocrtno gibanje jest jednoliko gibanje po kružnici kod kojeg je vektor brzine stalan po iznosu, ali stalno mijenja smjer, tako da uvijek zatvara pravi kut s radijusom kružne putanje i vektorom akceleracije (slika 2.20.). Promjena smjera brzine rezultira centripetalnom akceleracijom (slika 2.21.).





Slika 2.20. Jednoliko gibanje po kružnici

Slika 2.21. Uz centripetalnu akceleraciju

Ako je materijalna točka za vrijeme Δt prevalila put Δs (dio kružnog luka) odnosno kut $\Delta\varphi$, tada je njezina obodna ili linearna brzina:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega,$$

gdje je $\Delta s = r\Delta\varphi$, a $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ i naziva se kutna brzina. Jedinica za kutnu brzinu jest radijan po sekundi (rad s^{-1} ili samo s^{-1})

Ako je materijalna točka napravila jedan puni ophod ili okretaj, tada je prevalila put koji je jednak opsegu kruga i opisala puni kut 2π radijana (2π rad = 360°). Vrijeme jednog ophoda nazivamo period T. Sada možemo pisati:

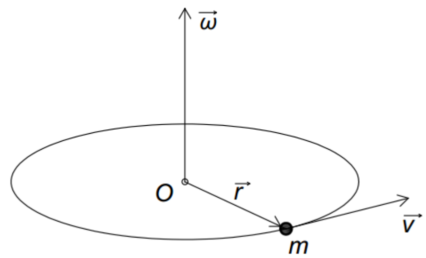
$$v = \frac{2r\pi}{T} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad v = r\omega$$

Obodna brzina $\vec{v}$, radijusvektor $\vec{r}$ i kutna brzina $\vec{\omega}$ jesu vektori, pa gornju jednadžbu možemo pisati vektorski u obliku vektorskog produkta:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{ili} \qquad \vec{v} = -\vec{r} \times \vec{\omega}$$

Uvijek je: $\vec{v} \perp \vec{r}$, $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ i $\vec{r} \perp \vec{\omega}$.

Kako se kod jednolikog kružnog gibanja stalno mijenja smjer obodne brzine, to je u stvari ubrzano gibanje, pa materijalna točka ima centripetalnu akceleraciju sa smjerom prema središtu kružnice.



Slika 2.22. Odnos obodne i kutne brzine i radijusvektora

Iz slike 2.22. slijedi da je: $|\Delta\vec{v}| = v\Delta\varphi$

Podijelimo obje strane te jednadžbe s Δt i nađemo graničnu vrijednost, dobivamo centripetalnu akceleraciju:

$$a_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta\varphi}{\Delta t} = v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = v\omega$$

$$a_{cp} = \frac{2r\pi}{T}\cdot\frac{2\pi}{T} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Jednoliko kružno gibanje je gibanje sa stalnom kutnom brzinom ω = konst.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = konst. \quad d\varphi = \omega dt$$

Integriranjem gornjeg izraza dobivamo:

$$\int d\varphi = \int \omega dt$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

Ophodno vrijeme T dobijemo tako da ukupno vrijeme podijelimo s brojem okretaja: $T = \frac{t}{N}$

Broj okretaja u sekundi zove se frekvencija: $f = \frac{N}{t}$. Vidimo da je: $f = \frac{1}{T}$

Jedinica za frekvenciju je herc (Hz) ili s^{-1}.

Očito je da vrijedi: $v = 2r\pi f$ $\omega = 2\pi f$ $a_{cp} = 4\pi^2 f^2 r$

2.2.2. Nejednoliko kružno gibanje

Kod nejednolikog kružnog gibanja, obodna brzina mijenja se i po iznosu i po smjeru, pa materijalna točka osim centripetalne akceleracije ima i tangencijalnu akceleraciju u smjeru tangente upravo zbog promjene iznosa obodne brzine:

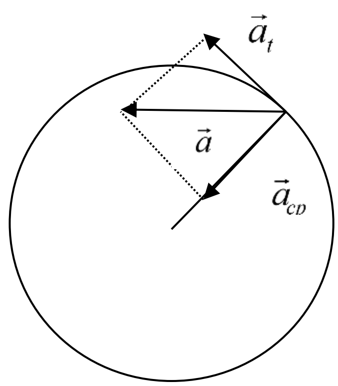
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$\text{ili} \qquad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad \text{(vektorski oblik)}$$

gdje je α kutna akceleracija, a po definiciji je jednaka:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \left[\frac{rad}{s^2} = s^{-2} \right]$$

Za jednoliko kružno gibanje vrijedi: $\omega = konst.$, $\alpha = 0$, $a_t = 0$.



Slika 2.23. Ukupna akceleracija

Ukupna akceleracija je:

$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t \qquad \text{(vektorski zbroj)}$$

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \qquad \text{(iznos ukupne akceleracije)}$$

Primjer 2.14. Dječak se na vrtuljku okreće po kružnici polumjera 5 m frekvencijom 1 Hz. Kolika mu je centripetalna akceleracija?

Rješenje:

$r = 5$ m

$f = 1$ Hz

$a_{cp} = ?$ $\qquad a_{cp} = \omega^2 r = (2\pi f)^2 r = 197{,}4\ \text{m s}^{-2}$

Analogija pravocrtnog i kružnog gibanja. Ako u formule pravocrtnog gibanja umjesto *s*, *v* i *a* uvrstimo *φ*, *ω* i *α*, dobivamo formule kružnog gibanja.

Pravocrtno gibanje	Kružno gibanje
s	φ
$v = \dfrac{ds}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$
$s = vt$	$\varphi = \omega t$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$s = s_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2as$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi$

PITANJA I ZADACI

1. Što je pomak, a što put? Koja je razlika između puta i pomaka?
2. Što znače pojmovi: jednoliko gibanje, nejednoliko gibanje, pravocrtno gibanje i krivocrtno gibanje?
3. Kako se definira srednja, a kako trenutna brzina pri pravocrtnom gibanju?
4. Što je akceleracija? Kako se definira srednja, a kako trenutna akceleracija?
5. Nacrtajte *v*-*t* graf za: a) gibanje konstantnom brzinom, b) jednoliko ubrzano gibanje i c) jednoliko usporeno gibanje.

6. Može li tijelo u kojem času imati brzinu nula, a da se u isto vrijeme giba jednoliko ubrzano?

7. S mosta bacimo kamen vertikalno u vodu brzinom 5 m s^{-1}. Nađite visinu mosta i brzinu kojom kamen padne u vodu ako pada 4 s.

8. Tane i zvuk koji je pritom nastao dopru istodobno do visine 600 m. Kolikom je brzinom izašlo tane iz cijevi ako je brzina zvuka 340 m s^{-1}? Otpor zraka zanemarimo.

9. Na putu od Vodica do Šibenika pola puta vozimo brzinom 30 km h^{-1}. Kolikom brzinom moramo voziti drugu polovicu puta da bi srednja brzina na cijelom putu bila 70 km h^{-1}? Udaljenost od Vodica do Šibenika je 13 km. Prokomentirajte rješenje koje ste dobili. Što nije dobro zadano?

10. Vlak se giba brzinom 72 km h^{-1} i naiđe na zatvoren signal. Vlak usporava tijekom 20 s i stoji na signalu 2,5 min, a potom tijekom 40 s ubrzava do 72 km h^{-1}. Koliko iznosi zakašnjenje vlaka?

11. Izračunati visinu s koje je tijelo pušteno da slobodno pada ako posljednjih 15 m prijeđe za 0,4 s.

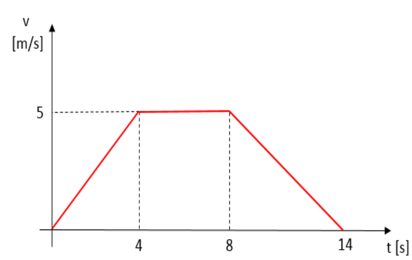
12. Automobil se giba po kružnoj stazi polumjera 400 m jednoliko ubrzano i za 5 s promjeni brzinu s 5 m s^{-1} na 20 m s^{-1}. Kolike su njegova stalna tangencijalna akceleracija te centripetalna i rezultantna akceleracija pri brzini 20 m s^{-1}?

13. Mjesec približno jednoliko kruži oko Zemlje na srednjoj udaljenosti 384400 km, a vrijeme kruženja je 27,3 dana. Kolike su njegova brzina i centripetalna akceleracija?

14. Koliku tangencijalnu akceleraciju ima dječak pri pokretanju vrtuljka ako se giba po kružnici polumjera 5 m kutnom akceleracijom 1 rad s^{-2}?

15. Kolika mora biti brzina zrakoplova u lupingu polumjera 1 km da ni sjedište ni pojas ne vrše na pilota nikakav pritisak kad se zrakoplov nalazi u najvišoj točki petlje?

16. Tijelo se giba pravocrtno tako da mu se brzina mijenja prema zadanom *v, t* grafu na slici (2.24). Nacrtajte *a, t* graf i *s, t* graf.



Slika 2.24. Uz zadatak 16.

17. Automobil kreće iz stanja mirovanja akceleracijom 4 ms^{-2}, upravo u tom trenutku pretječe ga drugi automobil koji se giba jednoliko po istom pravcu brzinom od 100 km h^{-1}. Koliko su automobili udaljeni jedan od drugog 10 s nakon pretjecanja?

18. Triatlonac prepliva 1500 m brzinom 1,5 m/s, zatim vozi bicikl 40 km brzinom 36 km/h, te pretrči 10 km brzinom 7,2 km/h. Koliko je vremena trajao triatlon i kolika je srednja brzina triatlonca?

19. Materijalna točka giba se jednoliko po kružnici polumjera 2 m centripetalnom akceleracijom 4,5 m s^{-2}. Kolika joj je brzina i ophodno vrijeme?

20. Kotač polumjera 0,1 m kotrlja se po horizontalnoj podlozi konstantnom kutnom akceleracijom. U trenutku t = 10 s nakon početka kotrljanja kutna brzina kotača je 30 s^{-1}. Odredite kutnu akceleraciju i akceleraciju i brzinu središta kotača u tom trenutku. Koliki je ukupan broj okretaja?

21. Dva trkača trče u maratonskoj utrci 42 km, trčeći 21 km u jednom smjeru, a zatim se vraćaju istim putom do mjesta odakle su krenuli. Brzina jednog od njih je 18 km h^{-1}, a drugog 12 km h^{-1}. Koliko je daleko od starta drugi trkač kada se susretnu? Koliko će kasnije drugi trkač stići na cilj? Riješite zadatak grafički i računski.

3. DINAMIKA

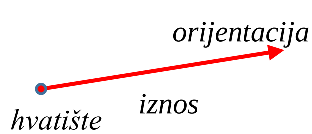
Dinamika je dio mehanike koji proučava uzroke gibanja. Uzrok gibanja je sila. Dakle, dinamika proučava gibanje i silu. Osnova dinamike su tri Newtonova zakona. Najčešće korištene veličine u dinamici su sila, masa, količina gibanja, moment sile, moment količine gibanja, rad, snaga i energija.

3.1. SILA I MASA

Sve što znamo o česticama i tijelima znamo zbog njihovog međudjelovanja. Poznato nam je da različita međudjelovanja opisujemo različitim zakonima sila (zakonima sile teže, elastične sile opruge, sile trenja itd.). Sve se te sile svode na svega tri osnovne (temeljne) sile (međudjelovanja) u prirodi: gravitacijsku (između bilo kojih dvaju tijela), elektromagnetsku (između električnih naboja u mirovanju, odnosno u gibanju) i nuklearnu (između nukleona u jezgri). Smatralo se da fundamentalnu silu predstavlja i slaba nuklearna sila (pri β-raspadu jezgre). Međutim, najnovija istraživanja pokazala su da se ona može svesti na elektroslabu.

Sila (međudjelovanje) jest fizikalna veličina kojom opisujemo jakost djelovanja jednog tijela na drugo tijelo, pri čemu jedno tijelo mijenja položaj drugog tijela ili ga deformira. Naprava za mjerenje sile jest dinamometar čiji je glavni dio elastična opruga. Djelovanjem sile elastična opruga se produlji, pri čemu je produljenje proporcionalno sili, $F = k\Delta l$, gdje je F sila koja djeluje na oprugu (force (eng.) = sila), k je konstanta opruge, a Δl produljenje opruge. Dinamometar se baždari u jedinicama za silu, pa pomoću njega možemo očitati veličinu sile.

Moramo naglasiti da je sila vektorska veličina, što znači da je određena iznosom (veličinom) i orijentacijom (usmjerenjem). Jedinica SI-ja za silu je njutn (N).



Slika 3.1. Sila kao vektor

Ako na tijelo djeluje više sila, njihovo djelovanje možemo zamijeniti jednom silom (slaganje sila), koju zovemo rezultanta. Silu možemo rastaviti na komponente ako znamo pravce na kojima komponente djeluju. Postupak slaganja i rastavljanja sila poznat nam je iz srednje škole.

Druga važna veličina u dinamici je masa. Masa je mjera za tromost tijela. Tromost (ustrajnost ili inercija) je svojstvo tijela da zadržava stanje mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja. Možemo reći da je masa otpor tijela prema promjeni brzine. Jedinica SI-ja za masu je kilogram (kg).

Za opisivanje gibanja tijela fizikalno je bolje uvesti količinu gibanja. Količina gibanja je vektor čiji je smjer određen smjerom brzine, a veličina je jednaka umnošku mase tijela i njegove brzine,

$\vec{p} = m\vec{v}$. Jedinica za količinu gibanja je **kg m s^{-1}**. Kako vidimo, količina gibanja uključuje brzinu i masu, pa nije svejedno ako se neko tijelo, npr. mase 50 kg, giba istom brzinom kao i tijelo mase 200 kg. Zato je za opisivanje gibanja bolja količina gibanja. Potpunija je relativistička definicija količine gibanja:

$$p = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Za $v \ll c$, (c je brzina svjetlosti u vakuumu) gornji izraz prelazi u klasični. O relativističkoj količini gibanja ovdje nećemo govoriti.

3.2. NEWTONOVI ZAKONI (AKSIOMI) MEHANIKE

3.2.1. Drugi Newtonov zakon

Newtonovi zakoni su aksiomatski, a ne izvedeni zakoni. Oni se ne mogu izravno eksperimentalno dokazivati, ali su podložni eksperimentalnim provjerama.

Drugi Newtonov zakon opisuje kako se ponaša tijelo na koje djeluje stalna sila. Pod djelovanjem stalne sile tijelo se giba jednoliko ubrzano ako sila djeluje u smjeru gibanja ili jednoliko usporeno ako sila djeluje u suprotnom smjeru od smjera gibanja. Eksperimentom se može pokazati da je akceleracija a razmjerna sili F, a obrnuto razmjerna masi tijela m:

$$a = \frac{F}{m}$$

Gornji izraz češće pišemo : $F = ma$

i nazivamo ga drugi Newtonov zakon ili temeljna jednadžba gibanja, a to možemo izreći riječima: **sila *F* koja djeluje na tijelo mase *m* tijelu daje akceleraciju *a*, pri čemu je sila *F* jednaka umnošku mase *m* tijela i akceleracije *a*, što ju je sila *F* dala tijelu mase *m*.**

Iz drugog Newtonovog zakona izvodimo jedinicu za silu :

$$F = ma \text{ [kg m s}^{-2} = \text{N]}$$

Jedinica za silu je njutn (N). Njutn je sila koja tijelu mase 1 kg daje ubrzanje 1 m s^{-2}.

Newton je dao dosta općenitiju formulaciju ovog zakona, poznatog kao 2. Newtonov aksiom:

Promjena gibanja proporcionalna je sili koja djeluje i odvija se u smjeru pravca u kojem djeluje sila.

Izraz gibanje znači fizičku veličinu koju mi danas nazivamo količina gibanja, *mv*. Prema tome, drugi Newtonov zakon možemo izraziti jednadžbom:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$$

Dakle, drugi Newtonov zakon može se izraziti u dva oblika, i to: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, koji vrijedi općenito (u klasičnoj i relativističkoj fizici), i $\vec{F} = m\vec{a}$, koji vrijedi samo u Newtonovoj mehanici.

Ako na tijelo istodobno djeluje više sila, tada tražimo rezultantu i II. Newtonov zakon pišemo:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}$$

Primjer 3.1. Automobil mase 1 t pri brzini 90 km h^{-1} počne kočiti i zaustavi se na putu dugom 69,44 m. Kolikom se akceleracijom zaustavljao i kolika je sila kočenja?

Rješenje:

m = 1 t

v_0 = 90 km h^{-1}

v = 0 km h^{-1}

<u>s = 69.44 m</u>

a = ?, F = ?

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

a = - 4,5 m s^{-2}

$$F = ma$$

F = - 4500 N

3.2.2. Sila teža, težina i gustoća tijela

Zemlja se vrti oko svoje osi, a skupa s njom i tijela na njezinoj površini. Zbog Zemljine vrtnje oko svoje osi, na tijela djeluje centrifugalna sila (o njoj detaljnije u sljedećim lekcijama). Između bilo kojih dvaju tijela djeluje gravitacijska sila. Na tijela na Zemlji, dakle, djeluju centrifugalna i gravitacijska sila. Centrifugalna sila smanjuje djelovanje gravitacijske sile na tijela i to najviše u blizini ekvatora, a najmanje na polovima. Rezultirajuća sila tih dviju sila naziva se sila teža. Sila teža djeluje na svako tijelo u blizini površine Zemlje prema njezinu središtu. Označava se s F_g i računa po formuli:

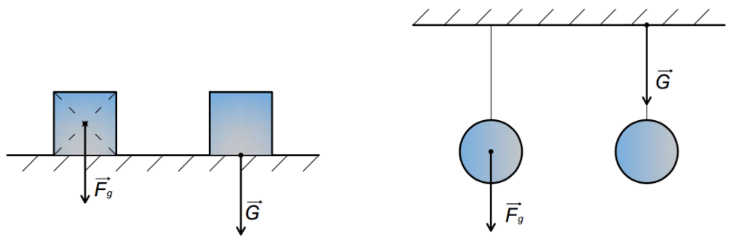
$$F_g = m\,g$$

Zbog sile teže, sva tijela pri slobodnom padu, na istom mjestu na Zemlji, padaju istom akceleracijom g ako zanemarimo otpor zraka, i to se zove akceleracija slobodnog pada ili akceleracija sile teže. Akceleracija slobodnog pada najveća je na polovima, a smanjuje se prema ekvatoru.

Tijela su teška zbog sile teže. Težina je sila kojom tijelo djeluje okomito na horizontalnu podlogu ili, ako visi, na objesište. U slučaju da tijelo miruje ili se giba jednoliko pravocrtno, težina je jednaka sili teži. Težinu tijela označavamo s G i pišemo:

$$G = m\,g$$

Razlika između sile teže i težine je u njihovom hvatištu. Hvatište sile teže je u težištu tijela, a hvatište težine je u točki u kojoj je tijelo poduprto ili u objesištu (slika 3.1.)



Slika 3.2. Sila teža i težina

Giba li se tijelo ubrzano, vertikalno, mijenja svoju težinu. Za vrijeme slobodnog pada tijelo ne pritišće na podlogu na kojoj se nalazi, pa kažemo da tijelo nema težinu (bestežinsko stanje). Takvi se uvjeti postižu u svemirskom brodu. Za astronauta koji lebdi u kapsuli svemirskog broda kažemo da je u bestežinskom stanju. To stanje odgovara slobodnom padu astronauta i broda, s tim što brod zbog zakrivljenosti Zemljine površine nikada ne padne na nju. Pritom je putanja svemirskog broda jednaka putanji kosog hica.

Kada se tijelo nalazi u zraku ili u tekućini, njegova se težina smanjuje za iznos uzgona.

Gustoća (ρ) definira se kao kvocijent mase i obujma tijela:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Jedinica SI-ja za gustoću je $kg\ m^{-3}$. Težinu možemo iskazati i preko gustoće:

$$G = \rho V g\,.$$

Navedimo vrijednosti za gustoću nekih tvari (tablica 3.1.):

Tvar	**Gustoća ρ/kg m^{-3}**	**Tvar**	**Gustoća ρ/kg m^{-3}**
pluto	250	Aluminij	2700
benzin (pri 20 °C)	700	Željezo	7800
ulje (pri 20 °C)	900	Bakar	8900

led	920	Olovo	11300
voda (pri 4 °C)	1000	živa (pri 20 °C)	13600
krv (plazma)	1030	Zlato	19300
beton	2300	Platina	21400

Tablica 3.1. Gustoća nekih tvari

Ako svi dijelovi tijela, pa i najmanji, imaju jednaku gustoću, kažemo da je ono homogeno. Gornja definicija vrijedi samo za homogena tijela. Ako tijelo nije homogeno, gustoća u pojedinoj točki tijela definira se pomoću derivacije:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Primjer 3.2. Izračunajte težinu tijela koje djelovanjem stalne sile 200 N prijeđe put od 70 m u vremenu 10 s.
Rješenje:

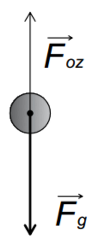
F = 200 N
s = 70 m
t = 10 s
G = ?

$$G = mg = \frac{F}{a} g = \frac{F}{\frac{2s}{t^2}} g = \frac{Ft^2}{2s} g$$

$$G = 1401 \text{ N}$$

Primjer 3.3. Dvije čelične kugle jednakog vanjskog promjera, jedna puna, a druga šuplja, padaju s iste visine. Koja će kugla prije pasti na zemlju ako u obzir uzmemo otpor zraka?

Rješenje:



$$F_R = F_g - F_{oz}$$

$$ma = mg - F_{0z}$$

$$a = g - \frac{F_{oz}}{m}$$

Budući da je otpor zraka jednak za obje kugle jer su im promjeri jednaki, zaključujemo da će teža kugla imati veću akceleraciju pri padanju, tj. prije će pasti na zemlju.

3.2.3. Prvi Newtonov zakon

Prvi Newtonov zakon govori o vladanju tijela kada je ukupna sila na tijelo jednaka nuli. Pođimo od drugog Newtonovog zakona. Ako je $F_R = 0$, iz $F_R = ma$, slijedi da je $a = 0$. Znamo da, ako je $a = 0$, tada je $v = 0$ ili $v = konst.$, što znači da tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Ipak, prvi Newtonov zakon svoj puni smisao dobiva kod definiranja inercijskog sustava.

Pođimo od primjera u prirodi. Tijelo koje stoji na podlozi miruje jer je ukupna sila na tijelo jednaka nuli. Sila teža koja djeluje na tijelo vertikalno prema dolje jednaka je sili kojom podloga djeluje na tijelo vertikalno prema gore, pa je ukupna sila na tijelo jednaka nuli.

Ako gurnemo neko tijelo po horizontalnoj podlozi, ono će se usporavati i nakon nekog vremena zaustaviti, zato jer na tijelo djeluju trenje i otpor zraka u suprotnom smjeru od smjera gibanja. Smanjivanjem trenja i otpora zraka, tijelo će se sve manje usporavati. Zaključujemo da, ako nema trenja i otpora zraka, tijelo se neće usporavati nego će se nastaviti gibati brzinom koju je postiglo na početku pokretanja. Do tog je zaključka došao i Galilei u 17. stoljeću. Na temelju ovakvih razmatranja Newton je došao do svog prvog zakona:

ako je ukupna sila koja djeluje na tijelo jednaka nuli, tada tijelo koje je mirovalo ostaje u stanju mirovanja, a tijelo koje se jednoliko gibalo ostaje u stanju jednolikog pravocrtnog gibanja.

To je zbog toga što je svako tijelo tromo (inertno). Zato prvi Newtonov zakon zovemo još zakon tromosti ili zakon inercije.

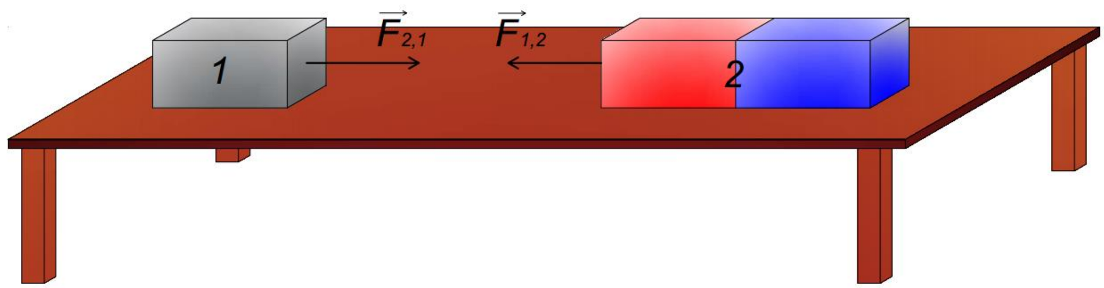
3.2.4. Treći Newtonov zakon

Ako uzmemo magnet i komad željeza i postavimo ih na stol, vidjet ćemo da se privlače. Zadržimo li magnet u ruci, a željezni komad udaljimo i pustimo, magnet će privući željezni komad. Ponovimo pokus tako da željezni komad držimo u ruci, a magnet odmaknemo i pustimo. Vidjet ćemo da se magnet giba prema željeznom komadu, tj. željezni ga komad privlači. Magnet označimo kao tijelo 1, a željezni komad kao tijelo 2, tada je sila kojom magnet djeluje na željezni komad $\vec{F}_{1,2}$, a sila kojom željezni komad djeluje na magnet $\vec{F}_{2,1}$. Zbog djelovanja sile $\vec{F}_{1,2}$, željezni komad dobiva akceleraciju $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{1,2}}{m_2}$, a zbog djelovanja sile $\vec{F}_{2,1}$, magnet dobiva akceleraciju $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{2,1}}{m_1}$. Iz pokusa možemo zaključiti da tijelo veće mase ima manju akceleraciju. Neka je $m_1 > m_2$, tada je $a_1 < a_2$. Izvođenjem nešto složenijeg pokusa u kojem je moguće precizno mjerenje akceleracije, zaključili bismo da je akceleracija tijela 1 onoliko puta manja od akceleracije tijela 2 koliko je njegova masa veća od mase tijela 2, iz čega slijedi da su sile $\vec{F}_{1,2}$ i $\vec{F}_{2,1}$ po veličini jednake, a suprotne orijentacije. Na taj način dolazimo do trećeg Newtonovog zakona (zakona sile i protusile ili zakona akcije i reakcije):

Ako tijelo 1 djeluje na tijelo 2 nekom silom $\vec{F}_{1,2}$, tada tijelo 2 djeluje na tijelo 1 protusilom $\vec{F}_{2,1}$, koja je po veličini jednaka sili $\vec{F}_{1,2}$, ali je suprotne orijentacije (slika 3.2.), tj.:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Napomenimo da sila i protusila ne djeluju na isto tijelo, nego na različita tijela koja su u međudjelovanju. Sila i protusila koegzistiraju i nije moguće imati jednu bez druge, tj. nema sile samo iz jednog smjera, postoji samo međudjelovanje.



Slika 3.3. Željezni komad 1 i magnet 2 u međudjelovanju

3.3. CENTRIPETALNA SILA

Da bi se tijelo gibalo jednoliko po kružnici, na njega mora djelovati stalna sila sa smjerom prema središtu kružne putanje. Ta se sila naziva centripetalna sila. Ona tijelu daje centripetalnu akceleraciju također usmjerenu prema središtu kružnice. Prema drugom Newtonovom zakonu, centripetalna sila jednaka je umnošku mase tijela i centripetalne akceleracije koju je tijelo dobilo djelovanjem centripetalne sile:

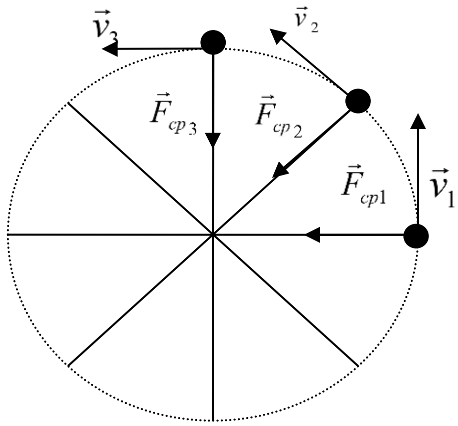
$$F_{cp} = ma_{cp}$$

Centripetalna akceleracija dana je izrazima:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}, \qquad a_{cp} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \qquad \text{i} \qquad a_{cp} = \omega^2 r$$

Izrazi za centripetalnu silu:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}, \qquad F_{cp} = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \qquad \text{i} \qquad F_{cp} = m \cdot \omega^2 r$$



$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots$$

Slika 3.4. Centripetalna sila

Centripetalna sila po veličini je stalna, ali neprestano mijenja smjer, tako da vektor sile uvijek zatvara pravi kut s vektorom brzine. Na slici 3.4. vidimo da je $\vec{F}_{cp1} \neq \vec{F}_{cp2} \neq \vec{F}_{cp3} \neq \ldots \neq \vec{F}_{cpn}$.

Navedimo nekoliko primjera centripetalne sile u prirodi: trenje između kotača i ceste kada se automobil giba u kružnom zavoju po cesti, sila na elektron kada se giba u magnetskom polju (Lorentzova sila), sila napetosti u niti za koju je vezano tijelo pri gibanju po kružnoj putanji itd. Gravitacijska sila između Zemlje i Mjeseca samo je aproksimacija centripetalne sile jer se Mjesec oko centra mase sustava Zemlja-Mjesec ne giba po kružnici nego elipsi vrlo malog ekscentriciteta. Sile su međudjelovanje dvaju tijela i zato se uvijek javljaju u paru i ne djeluju na isto tijelo. Tako i centripetalna sila i njezina protusila ne djeluju na isto tijelo. Centripetalna sila djeluje na tijelo koje se giba po kružnoj putanji, a njezina protusila djeluje na tijelo koje uzrokuje centripetalnu silu.

3.4. TRENJE

Za odvijanje aktivnosti u svakodnevnom životu nužno je trenje. Ono omogućuje hodanje, zaustavljanje, vožnju automobilom, skretanje vozila u zavoju. Na trenju se temelji i upotreba čavala, vijaka, klina, kočnice itd. No, ponekad je trenje nepoželjno, jer umanjuje učinkovitost strojeva, uzrokuje toplinu, trošenje površina, usporava gibanje i sl., pa se tada trenje nastoji učiniti što manjim, upotrebom kugličnih ležajeva i sredstava za podmazivanje te izglađivanjem dodirnih površina.

Teorija o trenju složena je i nedovoljno poznata, pa se ne možemo upuštati u njegova tumačenja. Možemo samo spomenuti da je trenje posljedica međumolekularnih sila na površini tijela.

Trenje je sila koja se javlja na dodirnim površinama između dva tijela ako se jedno od njih želi pokrenuti ili se već giba.

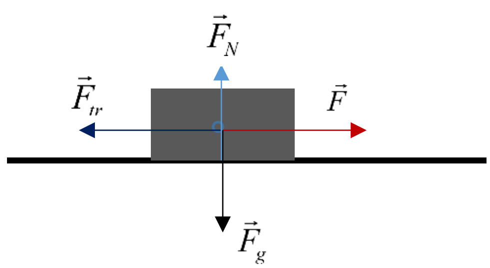
Razlikujemo vanjsko i unutrašnje trenje (viskoznost). Vanjsko trenje javlja se među čvrstim površinama, a unutrašnje među dijelovima fluida i između čvrstog tijela i fluida.

U kočnicama automobila, pri guranju nekog sanduka po podu bez nekog sredstva za podmazivanje i sl. javlja se suho trenje.

3.4.1. Vanjsko trenje; faktori trenja

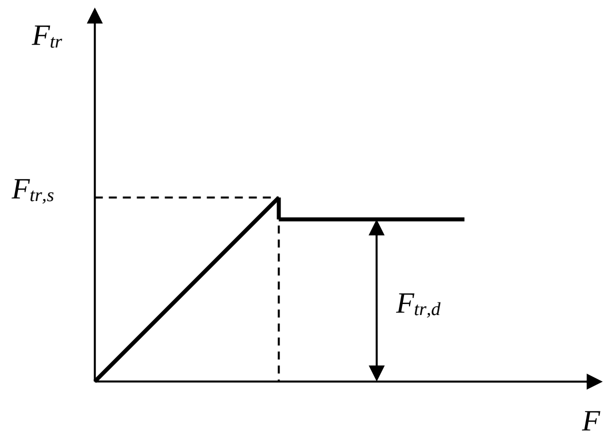
Vanjsko trenje nastaje između dodirnih površina dvaju čvrstih tijela. Ako površine miruju, trenje nazivamo **statičkim**, a ako se jedna prema drugoj relativno gibaju, trenje je **dinamičko**. Trenje klizanja pojavljuje se pri klizanju tijela po nekoj površini, a **trenje kotrljanja** javlja se kada se tijelo kotrlja (npr. kotač).

Počnemo li na tijelo djelovati nekom silom F, tijelo se neće odmah pokrenuti jer u suprotnom smjeru od smjera djelovanja sile djeluje trenje F_{tr} (slika 3.5.).



Slika 3.5. Uz objašnjenje trenja

Najveća sila koja djeluje suprotno vučnoj sili i prisiljava tijelo da još miruje naziva se **statičko trenje** (sila trenja mirovanja). Kada se tijelo pokrene, vučnu silu moramo smanjiti, želimo li da se tijelo giba jednoliko. To znači da je vučna sila pri klizanju, koja je potrebna za održavanje gibanja, manja od statičkog trenja. Stoga je i trenje klizanja manje od statičkog trenja (slika 3.6.). Trenje pri klizanju nazivamo **dinamičkim trenjem klizanja.**



Slika 3.6. Ovisnost trenja o vučnoj sili

Pokusima je utvrđeno da statičko trenje $F_{tr,s}$ ne ovisi o veličini dodirnih površina i da je razmjerno okomitom pritisku tijela na podlogu F_N (sili kojom jedna površina pritišće drugu):

$$F_{tr,s} \leq \mu_s F_N$$

gdje μ_s statički faktor trenja klizanja i ovisi o svojstvima dodirnih površina.

Dinamičko trenje klizanja također ne ovisi o veličini dodirnih površina, nego samo o njihovim osobinama, i razmjerno je okomitoj sili kojom tijelo pritišće podlogu.

$$F_{tr,} = \mu_d F_N$$

gdje je μ_d dinamički faktor trenja klizanja.

I statički faktor trenja klizanja (μ_s) i dinamički faktor trenja klizanja (μ_d) ovise o materijalu, hrapavosti i čistoći dodirnih površina (tablica 3.2.). Dinamički faktor trenja klizanja ovisi još i o relativnoj brzini dodirnih površina, ali tu ovisnost često zanemarujemo pri malim brzinama. I jedan i drugi faktor (koeficijent) uglavnom su neovisni o veličini kontaktne površine.

Promatrajmo kotač koji se kotrlja ravnom podlogom. U bilo kojem trenutku uočimo najnižu točku na kotaču koja je u dodiru s podlogom. U tom trenutku ta točka, u odnosu prema podlozi, načas miruje. Zbog toga se između kotača i podloge ne pojavljuje trenje klizanja, nego jedna druga vrsta trenja, trenje kotrljanja.

Ni kotač ni podloga nisu savršeno kruti i zato se na mjestu trenutačnog dodira između kotača i podloge pojavljuje malo deformiranje kotača i podloge, pri čemu se kotač malo spljošti, a podloga malo ulekne. Pri kotrljanju ta se deformacija stalno premješta idući obodom kotača, a kao posljedica pojavljuje se sila koja se opire kotrljanju. To je trenje kotrljanja.

Ako se tijelo kotrlja, trenje je mnogo manje nego pri klizanju. Zbog toga je potrebna manja sila da bi se neko tijelo premjestilo s jednog mjesta na drugo kotrljanjem negoli klizanjem. Zato se u tehnici klizanje nastoji nadomjestiti kotrljanjem.

Kod vozila na kotačima, na svakome mjestu na kojemu kotači dotiču tlo djeluje sila kotrljanja. Nadalje, trenje između kotača koji se okreće i nepomične osovine koja prolazi sredinom kotača smanjuje se pomoću kugličnih ležajeva: između glavčine kotača i osovine postavljene su čelične kuglice. Na taj način, umjesto da klizi po osovini, glavčina kotača kotrlja se po kuglicama oko osovine.

Dakle, kod mnogih uređaja potrebno je smanjiti trenje, što se postiže upotrebom kugličnih ležajeva i podmazivanjem dodirnih površina.

Zanimljivo je da je jedno od najučinkovitijih sredstava za podmazivanje tzv. sinovijska tekućina u ljudskim zglobovima. Ona čak stotinjak puta smanjuje trenje među kostima i zglobovima.

Sila trenja kotrljanja računa se po sličnoj formuli kao i dinamičko trenje klizanja, samo što je faktor trenja kotrljanja $\mu_{kot.}$ manji od dinamičkog faktora trenja klizanja. Dakle:

$$F_{tr,kot} = \mu_{kot} F_N$$

Dodirne površine	**Statički faktor trenja klizanja μ_s**	**Dinamički faktor trenja klizanja μ_d**	**Faktor trenja kotrljanja $\mu_{kot.}$**
Drvo na drvu	0,5	0,3	0,05
Čelik na čeliku	0,7	0,5	0,003
Guma na suhom asfaltu	0,8	0,6	0,01
Guma na mokrom asfaltu	0,3	0,2	0,005
Guma na ledu	0,02	0,01	
Čelik na ledu	0,03	0,01	
Kost i kost (bez podmaz.)		0,3	
Kost i kost (s podmaz. pomoću sinovijske tekućine u zglobu)		0,003	
Guma i beton (suhi)	1,0	0,7	

Tablica 3.2. Neki tipični faktori trenja

3.4.2. Uzrok sile trenja

Teorija o trenju složena je i nedovoljno poznata, ali se mehanizam trenja može kvalitativno opisati.

Uglavnom su dva glavna uzroka pojave trenja klizanja između površina dvaju tijela u dodiru. Prvi je uzrok hrapavost površine: površine tijela nisu savršeno glatke, nego uvijek imaju sićušne udubine i izbočine koje zalaze jedne u druge opirući se gibanju jednog tijela u odnosu na drugo.

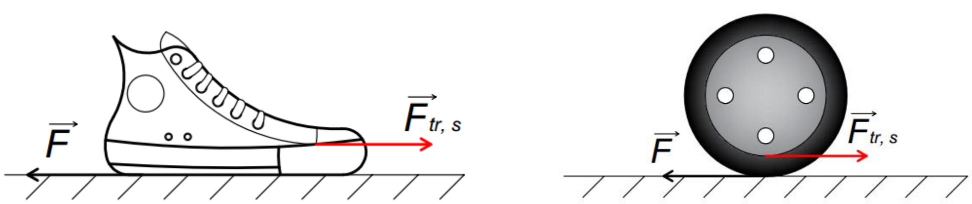
Drugi uzrok pojave trenja je djelovanje adhezijskih molekularnih sila između čestica tvari u području dodira. Što je veća sila kojom jedna površina pritišće drugu, to će kontakt površina biti bolji i adhezija[1] veća.

U nekim primjerima učinak molekularnih sila važniji je od učinka hrapavosti površina, primjerice pri trenju staklenog tijela i staklene podloge. To je trenje veće ako su dodirne površine vrlo glatke negoli ako su hrapave. Naime, ako su površine vrlo glatke, tada one dobro prianjaju jedna uz drugu i snažnije je djelovanje privlačnih molekularnih sila između čestica na jednoj i drugoj površini koje djeluju jače kada su čestice međusobno bliže.

3.4.3. Trenje u svakodnevnom životu

3.4.3.1. Sila trenja kao pokretačka sila pri hodanju i vrtnji kotača

Da nema trenja, ne bismo mogli hodati. Kada namjeravamo krenuti, guramo stopalo prema natrag i, da nema trenja, stopalo bismo gurnuli ne maknuvši se. Zahvaljujući hrapavosti podloge i potplata djelujemo na tlo silom F. Time izazivamo protusilu koja je jednaka sili trenja i koja nas pokreće te nam daje akceleraciju.



Slika 3.7. Trenje kao pokretačka sila

Zahvaljujući trenju pokreću se vozila na kotačima. Kotač se okreće zahvaljujući sili motora i djeluje na tlo silom F, a tlo na kotač silom trenja $F_{tr,s}$. Najveća sila kojom možemo djelovati na tlo, a da se ne poskliznemo, i sila kojom kotač djeluje na tlo bez proklizavanja jednaka je statičkom trenju klizanja.

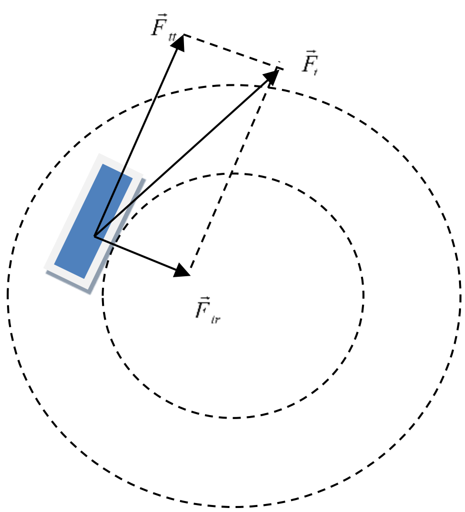
[1] Prionjivost, međusobno privlačenje dvaju tijela koja se tijesno dotiču; prianjanje, priljubljivanje, lijepljenje.

Dakle, kotač po tlu ne pokreće sila motora. Ona ga samo vrti. Tek u dodiru kotača s tlom javlja se sila trenja koja ga pokreće.

3.4.3.2. Gibanje automobila u zavoju

Pogonska sila motora okreće kotač automobila. Kotač djeluje na cestu, a cesta na kotač protusilom jednakog iznosa i suprotnog smjera. Ta sila kojom cesta djeluje na kotač sila je statičkog trenja klizanja. Ako se tijelo giba pravocrtno, sila trenja na kotač omogućuje mu gibanje i ima smjer gibanja.

Kada je kotač u zavoju, sila trenja, osim gibanja kotača, omogućuje još i promjenu smjera njegove brzine (daje kotaču centripetalnu akceleraciju). Dakle, sila $\vec{F}_t$ ima dvije komponente, jednu u smjeru radijusa $\vec{F}_{tr}$, a drugu u smjeru tangente $\vec{F}_{tt}$ (slika 3.8)



Slika 3.8. Gibanje automobila u zavoju

Da bi se automobil mogao gibati bez zanošenja, komponenta sile trenja $\vec{F}_{tr}$ usmjerena prema središtu zakrivljenosti zavoja ne smije biti manja od centripetalne sile potrebne za kružno gibanje. Najmanjem faktoru trenja odgovara najmanja sila trenja koja je jednaka centripetalnoj sili:

$$F_{tr} = F_{cp}$$

$$\mu mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$\mu = \frac{v^2}{rg}$$

Tako smo odredili najmanji faktor trenja između kotača automobila i ceste da bi se automobil mogao gibati bez zanošenja brzinom *v* u zavoju polumjera zakrivljenosti *r*.

3.4.4. Otpor sredstva

Otpor sredstva je vrsta trenja koja se javlja dok se tijelo giba kroz fluid. Veličina otpora sredstva ovisi o veličini i obliku tijela, o brzini gibanja tijela u odnosu na fluid i osobinama fluida. Pri manjim brzinama, kada je strujanje fluida oko tijela laminarno, taj je otpor manji i proporcionalan brzini, a pri većim brzinama, kada strujanje postaje vrtložno, otpor je veći i proporcionalan je kvadratu brzine:

$$F_o = \frac{1}{2} S c \rho v^2$$

gdje je *S* površina poprečnog presjeka, ϱ gustoća fluida, c otporni broj (ili aerodinamički faktor) koji za kuglu iznosi 0,35, za otvoreni padobran 1.3, a za aerodinamički oblik 0,05.

Proučavanje otpora sredstva pri gibanju tijela kroz fluid važno je za konstrukciju automobila, brodova i zrakoplova. Otpor sredstva smeta nam, ali i pomaže.

Iz gornjeg izraza vidljivo je da povećanjem brzine npr. automobila sila otpora raste s kvadratom brzine, zbog čega se automobilu naglo povećava potrošnja goriva. Automobilski dizajneri veoma paze na ovisnost otpora zraka o obliku tijela, odnosno o aerodinamičkom faktoru *c*, pa sportski automobili velike snage, predviđeni za velike brzine, imaju aerodinamičniji oblik nego obiteljski. Aerodinamički faktor manji je za sportske automobile.

Padobran je dobar primjer kako nam otpor sredstva pomaže u sigurnom spuštanju s velikih visina. Komentirajte spuštanje padobrana.

3.5. ELASTIČNA SILA

Djelujemo li na neko čvrsto tijelo silom, uočit ćemo da će ta sila na tijelu izazvati deformaciju (promjenu oblika i obujma) koja ne ovisi o samoj sili nego o vrsti materijala i dimenzijama. Pri svakoj deformaciji narušava se ravnoteža između privlačnih i odbojnih sila među molekulama jer dolazi do premještanja njihovih položaja.

Ako se neko tijelo (ekspander) pod djelovanjem sile deformira, a nakon prestanka sile vraća u prvobitno stanje, takvo svojstvo tijela zovemo elastičnost. Vanjskoj sili protivi se elastična sila po veličini jednaka vanjskoj sili, a po smjeru suprotna.

Djelujemo li silom na gumenu vrpcu obješenu o stalak, uočit ćemo da će se produljiti (slika 3.9.). Produljenje gumene vrpce pri rastezanju u elastičnom području ovisi o sili, početnoj duljini, površini presjeka i vrsti materijala, čiju ovisnost možemo izraziti u matematičkom obliku i nazivamo Hookeovim zakonom:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl}{S}$$

Δl **-** produljenje

$\frac{1}{E}$ - faktor razmjernosti

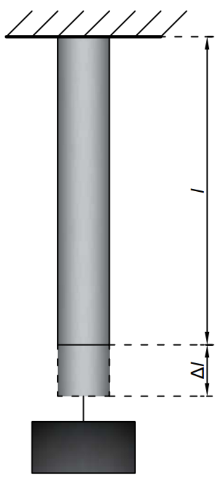
E–Youngov modul elastičnosti

F – deformacijska sila

l – početna duljina

S – površina presjeka

Youngov modul elastičnosti E konstanta je karakteristična za pojedinu vrstu materijala. Određuje se eksperimentalno. Što je modul elastičnosti veći, produljenje će biti manje. Mjerna jedinica SI-ja za modul elastičnosti je paskal [Pa].



Slika 3.9. Produljenje

Tvar	Youngov modul elastičnosti E / 10^9 Pa
aluminij	70
bakar	120
čelik	210
guma	50
olovo	15

Tablica 3.3. Youngov modul elastičnosti nekih tvari

Pravu mjeru za veličinu deformacijske sile dobijemo kada silu podijelimo presjekom jer ona djeluje na sve točke presjeka, ali će joj djelovanje po pojedinoj čestici biti slabije što je površina presjeka veća. Kvocijent sile i ploštine poprečnog presjeka naziva se naprezanje p i izraženo je jednadžbom:

$$p = \frac{F}{S} \quad [\mathrm{N\ m^{-2} = Pa}],$$

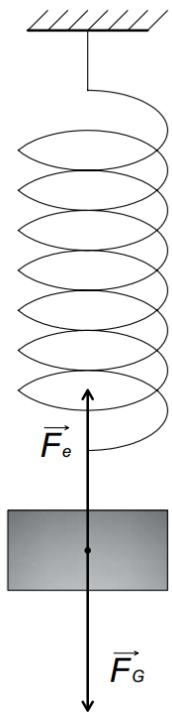
pa gornju jednadžbu možemo pisati:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot p$$

$\frac{\Delta l}{l}$ je relativno produljenje, pokazuje produljenje po jedinici duljine i zato ga je pogodnije uzeti za veličinu deformacije. Relativno produljenje razmjerno je naprezanju.

Pri rastezanju elastične opruge (slika 3.10.) u području elastičnosti u njoj se javlja elastična sila koja je po veličini jednaka vanjskoj sili, ali je suprotnog smjera. Povećavanjem vanjske sile povećava se i elastična sila u opruzi:

$$\vec{F}_{el} = -\vec{F}_g$$



Iz Hookeova zakona slijedi:

$$F_{el} = -\frac{ES}{l}\Delta l$$

Izraz $\frac{ES}{l}$ konstanta je za određeno tijelo, pa

elastičnu silu možemo napisati:

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta\vec{l}$$

gdje je k – konstanta opruge.

Slika 3.10. Rastegnuta elastična opruga

Primjer 3.4. Čelična žica duljine 1 m podvrgnuta je naprezanju 1050 MPa. Koliko je produljenje?
Rješenje:

l = 1 m

p = 1050 MPa

E = 210 GPa

Δl = ?

$$\Delta l = \frac{l}{E}p = 4{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

Primjer 3.5. Na horizontalnoj pruzi lokomotiva vuče vlak vučnom silom 180 000 N. Na dijelu puta dugačkom 500 m brzina vlaka porasla je od 36 km h^{-1} na 72 km h^{-1}. Koliko je trenje ako je masa vlaka 500 t?

Rješenje: $F_R = F - F_t$ $\quad F_t = F - F_R = F - ma = F - m\dfrac{v^2 - v_0^2}{2s} = 30000$ N

Primjer 3.6. Renault Clio čija je masa oko 1200 kg ulazi u zavoj bez nagiba polumjera 100 m najvećom brzinom 72 km h^{-1}, pri čemu još ne proklizava. Odredite centripetalnu silu koja djeluje na automobil, statičku silu trenja koja zadržava automobil u zavoju i statički faktor trenja.
Rješenje:

m = 1200 kg
r = 100 m
v = 72 km h^{-1}
F_{cp} = ?
$F_{t,s}$ = ?
μ_s = ?

Centripetalnu silu računamo po formuli:

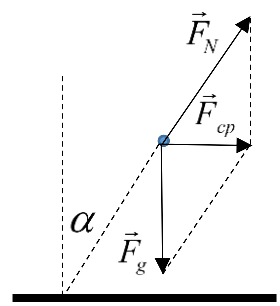
$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r} = 4800N$$

Statička sila trenja koja zadržava automobil u zavoju je centripetalna sila:
$F_{t,s} = F_{cp} = 4800$ N

Statički faktor trenja:

$$\mu_s = \frac{F_{t,s}}{F_g} = 0,4$$

Primjer 3.7. Biciklist se giba po horizontalno položenome polukružnom zavoju polumjera 5 m najvećom mogućom brzinom 5 m/s u zavoju.
a) Koliki je faktor trenja između gume bicikla i asfalta?
b) Koliki je kut između biciklista i okomice na podlogu zbog njegova nagiba u zavoju?



Slika 3.11. Biciklist u zavoju

Rješenje:

r = 5 m
v = 5 m s^{-1}
μ = ?; α = ?

a)

$$F_{cp} = F_t$$

$$\frac{mv^2}{r} = \mu mg$$

$$\mu = \frac{v^2}{rg} = 0,51$$

b)

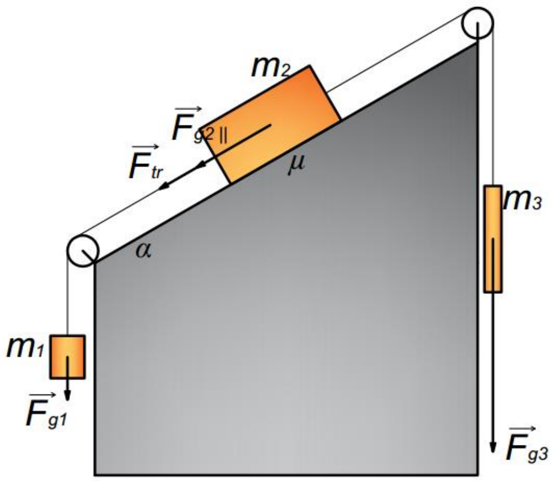
$$tg\alpha = \frac{F_t}{F_g} = \frac{\mu mg}{mg}$$

$$tg\alpha = \mu$$

$$\alpha = 27°$$

Primjer 3.8. Koliki je iznos akceleracije pomičnog dijela sustava na slici 3.16. uz pretpostavku da u početnom trenutku tijela miruju, ako je zadano α = 37°, m_1 = 2 kg, m_2 = 5 kg, m_3 = 13 kg, koeficijent trenja između tijela mase m_2 i podloge μ = 0,25. Mase kolotura su zanemarive.

Rješenje:
Pretpostavimo da se sustav giba uz kosinu. (Nacrtajte sve sile koje djeluju na sustav). Nađimo rezultantnu silu na sustav:



Slika 3.12. Uz primjer 3.8.

$$F_R = F_{g3} - F_{g1} - F_{g2II} - F_{tr}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = m_3 g - m_1 g - m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha$$

$$a = \frac{(m_3 - m_1 - m_2 \sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha)g}{m_1 + m_2 + m_3} = 3{,}43 \text{ m s}^{-2}$$

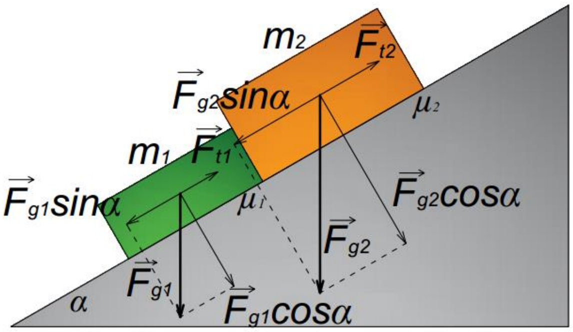
Provjerite bismo li dobili isti rezultat, možda s negativnim predznakom, da smo pretpostavili da se sustav gibao niz kosinu.

Primjer 3.9. Na kosini nagiba α = 37° nalazi se tijelo mase m_1 = 2 kg, i m_2 = 4 kg. Faktori trenja između podloge i tijela su μ_1 = 0,3 i μ_2 = 0,1.

a) Kolika je akceleracija tijela masa m_1 i m_2 uz pretpostavku da tijela u početnom trenutku miruju?

b) Kolika je sila međudjelovanja?

c) Odredite najmanji kut kod kojeg dolazi do klizanja.



Slika 3.13. Uz primjer 3.9.

Rješenje:

Sustav će se gibati niz kosinu u smjeru rezultantne sile. (Nacrtajte, za vježbu, sve sile koje djeluju u smjeru gibanja sustava).

a) $$F_R = F_{g1}\sin\alpha + F_{g2}\sin\alpha - \mu_1 F_{g1}\cos\alpha - \mu_2 F_{g2}\cos\alpha$$

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g\sin\alpha + m_2 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha - \mu_2 m_2 g\cos\alpha$$

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g\sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g\cos\alpha}{m_1 + m_2} \qquad (*)$$

$$a = 0{,}47g = 4{,}6\ \text{m s}^{-2}$$

b) $$F_{12} = F_{21} = \frac{(\mu_1 - \mu_2)m_1 m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2}g$$

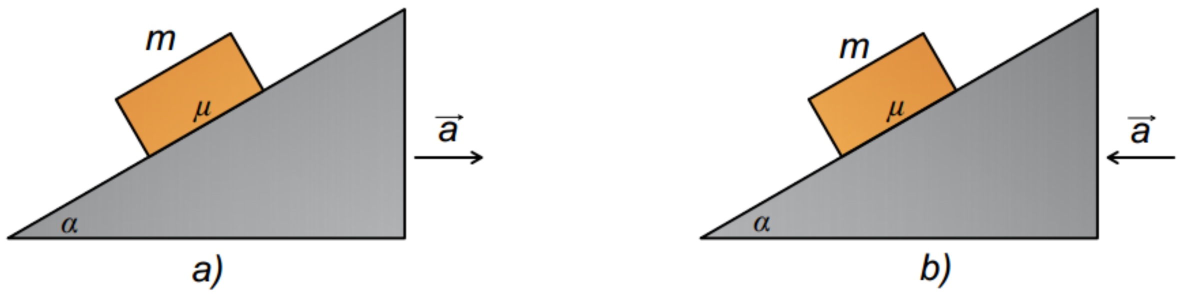
$$F_{12} = F_{21} = 2{,}09\ \text{N}$$

c) Do klizanja dolazi kada je $F_R \geq 0$, tj. $a \geq 0$, pa iz (*) slijedi:

$$g\sin\alpha \geq \frac{\mu_2 m_2 + \mu_1 m_2}{m_1 + m_2} g\cos\alpha$$

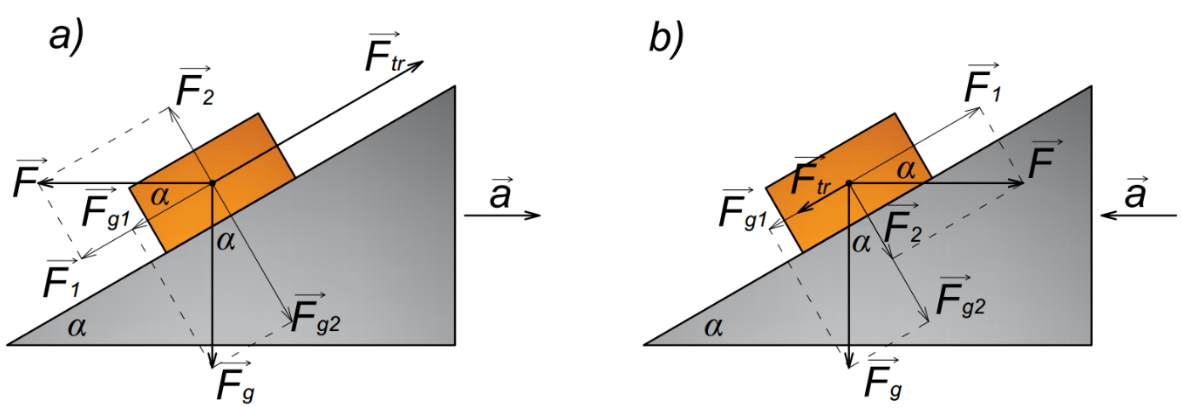
$$tg\alpha \geq \frac{\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}1667 \qquad \alpha \geq 9{,}5°$$

Primjer 3.10. Prizmatično tijelo kuta α može se gibati po horizontalnoj podlozi. Na prizmi se nalazi malo tijelo koje u početnom trenutku miruje. Faktor trenja između podloge i tijela je μ. Odrediti minimalni iznos akceleracije prizme pri kojoj će se tijelo na prizmi početi gibati u odnosu na slučaj gibanja a) i b).



Slika 3.14. Uz primjer 3.10.

Rješenje:



Slika 3.15. Uz rješenje primjera 3.10.

a)

$$F_1 + F_{g1} = F_t$$
$$F\cos\alpha + F_g \sin\alpha = \mu\left(F_{g2} - F\sin\alpha\right)$$
$$ma\cos\alpha + mg\sin\alpha = \mu\left(mg\cos\alpha - ma\sin\alpha\right)$$
$$a = \frac{(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)g}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

b)

$$F_t + F_{g1} = F_1$$
$$\mu\left(F_{g2} + F_2\right) + F_{g1} = F_1$$
$$\mu\left(mg\cos\alpha + F\sin\alpha\right) + mg\sin\alpha = F\cos\alpha$$
$$\mu\left(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha\right) + mg\sin\alpha = ma\cos\alpha$$
$$a = \frac{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)g}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

Naravno, u oba slučaja mora vrijediti $\mu \geq tg\alpha$ zbog početnog uvjeta da tijelo miruje na kosini.

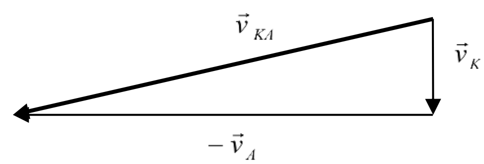
Primjer 3.11. Jedrenjem na dasci (more) ili jedrenjem na ledu mogu se postići brzine nekoliko puta veće od brzine vjetra. Objasniti kako je to moguće.

Rješenje:

Jedrilica postiže maksimalnu brzinu kada čestice zraka više ne predaju količinu gibanja mv_v jedru. To je ostvareno kada nestane komponente brzine vjetra okomite na jedra u sustavu vezanom za jedrilicu. To možemo objasniti na primjeru relativne i apsolutne brzine kiše i automobila.

$$\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA} \rightarrow \vec{v}_{KA} = \vec{v}_K - \vec{v}_A$$

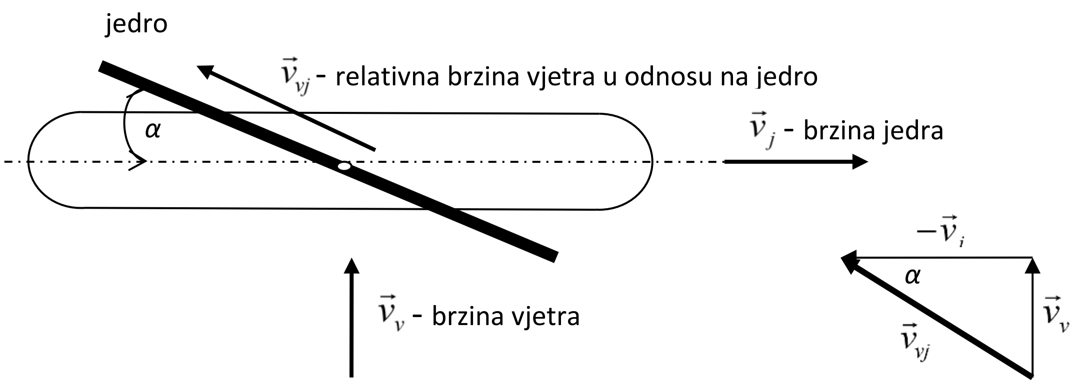
$\vec{v}_{KA}$ je relativna brzina kiše u odnosu na automobil. To je brzina koju mi „vidimo“ iz auta ili to je brzina kojom kapi kiše udaraju o naše tijelo kada se vozimo u otvorenom autu, na biciklu, motociklu…



Slika 3.16. Relativna brzina kiše i automobila

Ako ovo primijenimo na jedrilicu (slika 3.17.), dobivamo:

$$\vec{v}_v = \vec{v}_j + \vec{v}_{vj} \qquad \vec{v}_{vj} = \vec{v}_v - \vec{v}_j$$



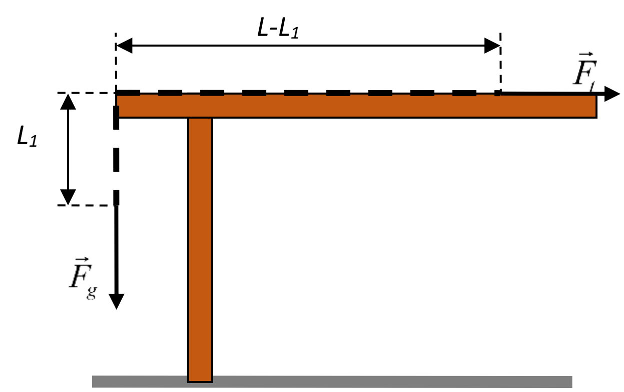
Slika 3.17. Jedrilica

$\vec{v}_{vj}$ jest relativna brzina vjetra u odnosu na jedro (slika 3.16) mora biti paralelna s ravninom jedra jer će ta količina gibanja koju čestice vjetra predaju jedru biti jednaka nuli. Iz slike:

$$tg\alpha = \frac{v_v}{v_j} \qquad v_j = \frac{v_v}{tg\alpha}, \qquad \text{za } \alpha < 45°, \qquad v_j > v_v$$

U idealiziranom slučaju, kada ne bi bilo otpora gibanju jedrilice, mogla bi se smanjivanjem kuta α postići po volji velika brzina jedrenjaka. U stvarnosti postoji otpor gibanju jedrilice (daske). Iskustvo pokazuje da je maksimalna brzina jedrilice: $v_{j,\max} \approx 3v_v$

Primjer 3.12. Lanac duljine L prebačen preko stola djelomično leži, a djelomično visi. Faktor trenja između stola i lanca je μ = 0,2. Koliki je najveći omjer duljine lanca L_1 koji visi, prema ukupnoj duljini lanca L, da bi lanac ostao u tom položaju?



Rješenje:

Slika 3.18. Uz primjer 3.12.

Masa lanca na stolu: $m\frac{L-L_1}{L}$, gdje je m masa lanca duljine L

Masa lanca koji visi: $m\frac{L_1}{L}$

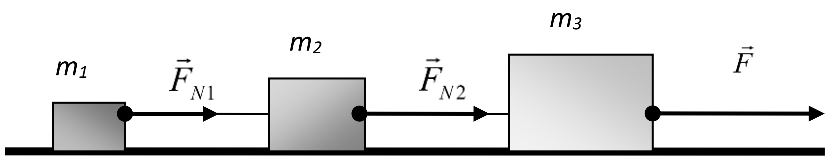
Da bi lanac ostao u tom položaju (slika 3.17.), mora biti ispunjen uvjet:

$$F_t = F_g$$

$$\mu m\frac{L-L_1}{L}g = m\frac{L_1}{L}g \qquad \mu(L-L_1) = L_1 \qquad \mu L - \mu L_1 = L_1$$

$$\frac{L}{L_1} = \frac{\mu}{1+\mu} \qquad \frac{L_1}{L} = \frac{1}{6}$$

Primjer 3.13. Tri su tijela međusobno spojena nitima. Kolike su napetosti F_{N1} i F_{N2} ovih niti: a) ako je podloga savršeno glatka; b) ako je faktor trenja prema podlozi μ = 0,1? Neka je m_1 = 2 kg, m_2 = 4 kg, m_3 = 6 kg, F = 24 N.



Slika 3.19. Uz primjer 3.13.

Rješenje:

a) $$F = (m_1 + m_2 + m_3)a \qquad a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad a = 2\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

$$F_{N2} = (m_1 + m_2)a = 12\ \mathrm{N} \qquad F_{N1} = m_1 a = 4\ \mathrm{N}$$

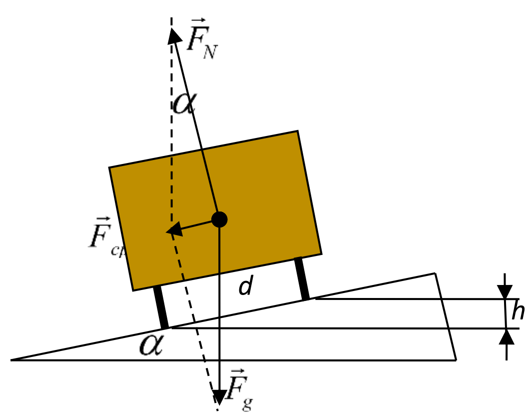
b) $$F_R = F - F_t \qquad (m_1 + m_2 + m_3)a = F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g$$

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad a = 1{,}02\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$

$$F_{R2} = F_{N2} - F_{t2} \qquad F_{N2} = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g \qquad F_{N2} = 12\ \mathrm{N}$$

$$F_{R1} = F_{N1} - F_{t1} \qquad F_{N1} = m_1 a + \mu m_1 g \qquad F_{N1} = 4\ \mathrm{N}$$

Primjer 3.14. Izračunajte nagib tračnica na zavoju zakrivljenosti R = 300 m tako da pri brzini od v = 72 km h^{-1} nikakve bočne sile ne djeluju na vlak, tj. da pritisak na obje tračnice bude jednak. Kolika je visinska razlika tračnica ako je to normalni kolosijek d = 1,435 m?



Slika 3.20. Uz rješenje primjera 3.14.

Rješenje

Da bi pritisak na obje tračnice bio jednak, vektorski zbroj (rezultanta) centripetalne sile i okomitog pritiska na tračnice mora biti jednak težini vlaka. Prema slici 3.20. slijedi:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_g + \vec{F}_N \qquad \vec{F}_N \text{ je reakcija podloge}$$

$$tg\alpha = \frac{F_{cp}}{F_g} = \frac{mv^2}{Rmg} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\alpha = 7{,}7°$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{d} \qquad h = d\sin\alpha \qquad h = 0{,}19 \text{ m}$$

PITANJA I ZADACI

1. Što je sila? Kakvo može biti njezino djelovanje? Kako se mjeri?
2. Što je masa?
3. Kako glasi prvi Newtonov zakon? Što je tromost?
4. Kako glasi drugi Newtonov zakon?
5. Što je težina, a što sila teža? U kojim se jedinicama iskazuje težina?
6. Kako glasi treći Newtonov zakon? Navedite nekoliko primjera.
7. Objasnite centripetalnu silu. Napišite sve oblike formula centripetalne sile.
8. Što je težište? Koja je razlika između težišta i centra mase?
9. Što je trenje? Kako se računa trenje?
10. Kolika je vučna sila potrebna da bi se vlak mase 400 t ubrzao od 0 do 36 km h^{-1} na putu 1000 m: a) ne uzimajući u obzir trenje, b) ako je faktor trenja 0,005?
11. Čovjek gura teret mase 30 kg stalnom brzinom po horizontalnoj podlozi silom koja zatvara kut od 37° s horizontalom. Faktor trenja je 0,3. a) Kolika je sila? b) Kolika bi bila sila kad bi čovjek u istim uvjetima vukao teret?
12. Automobil mase 2000 kg vozi stalnom brzinom 36 km h^{-1} preko mosta koji ima oblik: a) izbočenog luka, b) udubljenog luka. Polumjer zakrivljenosti mosta je 100 m. Kolika je, u oba slučaja, sila pritiska automobila na podlogu na sredini mosta? Pri kojoj brzini sila pritiska na podlogu u sredini izbočenog mosta iščezne?

13. Preko kolotura Atwoodova padostroja prebačena je tanka čelična žica na čijim krajevima vise utezi mase m_1 = 0,18 kg i mase m_2 = 0,22 kg. Izračunajte akceleraciju utega i napetosti niti. Zanemarite trenje te masu žice i kolotura.

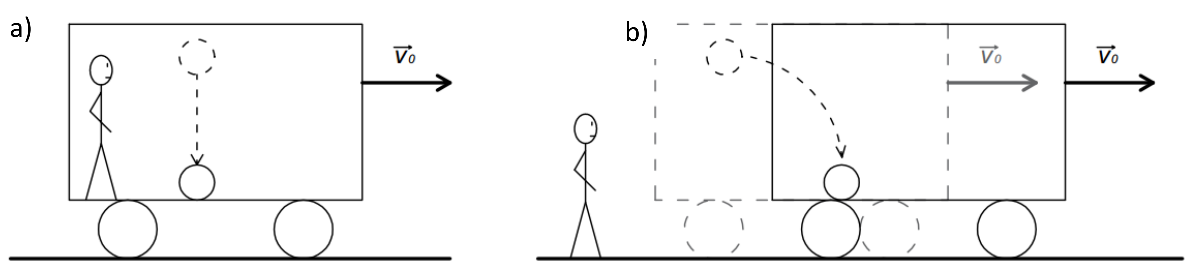
3.6. RELATIVNOST GIBANJA I INERCIJSKE SILE

Sustav u odnosu na koji opisujemo gibanje tijela naziva se referentni sustav. Referentni sustavi mogu biti inercijski i neinercijski. Sustav koji miruje ili se giba jednoliko u odnosu na motritelja na Zemlji naziva se inercijski sustav (jer u njemu vrijedi prvi Newtonov zakon i svi zakoni gibanja koje smo upoznali). Neinercijski sustavi su referentni sustavi koji se gibaju nekom akceleracijom u odnosu na neki inercijski sustav (u njima ne vrijedi prvi Newtonov zakon, čija se valjanost upravo uzima kao kriterij je li neki sustav inercijski ili nije).

Primjeri inercijskog sustava su dvorana u kojoj se nalazimo, brod ili autobus u jednolikoj pravocrtnoj vožnji itd. Promatramo li, npr. slobodni pad nekog predmeta u dvorani ili u autobusu koji se giba stalnom brzinom po pravcu, slobodni pad izvodi se na isti način. I sve ostale pojave događaju se na isti način u oba referentna sustava.

Svaki referentni sustav koji miruje ili se giba jednoliko pravocrtno s obzirom na neki drugi inercijski sustav također je inercijski sustav. Svi su inercijski sustavi jednaki jer su u njima svi zakoni mehanike jednaki. Svi inercijski sustavi jednako su vrijedni ili ekvivalentni. Ni na koji način ne možemo pokusima ustanoviti koji sustav miruje, a koji se jednoliko giba. Svaki od njih možemo smatrati apsolutno mirnim, što znači da nema apsolutno mirnog sustava. To je poznato Galileijevo načelo relativnosti koje vrijedi u klasičnoj mehanici.

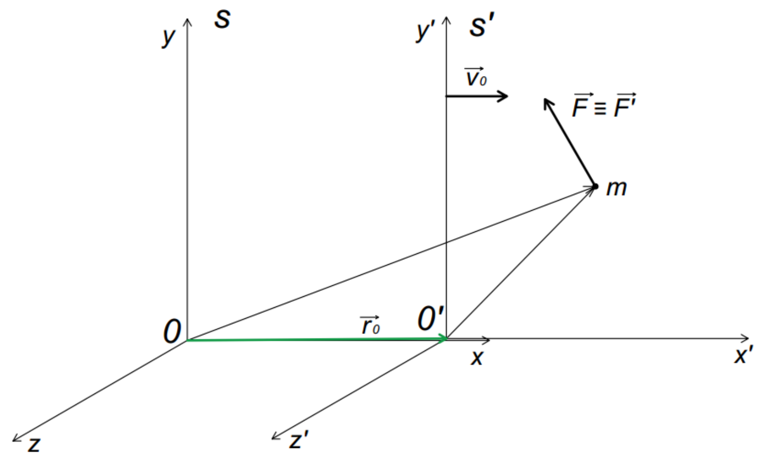
Znači, gibanja tijela zbivaju se na isti način u svim inercijskim sustavima za promatrača koji se nalazi u tom sustavu. No, ako promatrač sa Zemlje promatra slobodni pad u autobusu koji se giba jednoliko pravocrtno, putanja tijela koje slobodno pada neće biti pravac, već krivulja, kao kod horizontalnog hica (slika 3.6.1.).



Slika 3.6.1. Putanja tijela pri slobodnom padu u autobusu koji se giba jednoliko po pravcu: a) za promatrača u autobusu, b) za promatrača na Zemlji

Postavimo prijelaz iz Zemljina inercijskog sustava u inercijski sustav autobusa i obratno, tj. vezu između koordinata položaja i brzine tijela u dva inercijska sustava. Tu vezu nazivamo **Galileijevim transformacijama**.

Neka su dva inercijska sustava **S** i **S´** (slika 3.6.2.) koji se jedan prema drugom gibaju stalnom brzinom $\vec{v}_0$ u smjeru osi *x*, tako da se *x* i $x^{\prime}$ poklapaju, a osi *y* i *z* ostaju paralelne s *y´* i *z´*. U početnom trenutku ($t = t^{\prime} = 0$) sustavi se poklapaju. Položaj tijela (materijalne točke) u referentnom sustavu **S** određen je radijusvektorom $\vec{r}$, a u referentnom sustavu **S´** radijusvektorom $\vec{r}\,'$, a ishodišta su povezana vektorom $\vec{r}_0$. Veza vektora položaja između **S** i **S´** je: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$



Slika 3.6.2. Uz Galileijeve transformacije

Vrijeme jednako teče u oba inercijska sustava: $t = t'$

Ako deriviramo vektore položaja po vremenu, dobivamo vezu među brzinama:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$

gdje je $\vec{v}$ brzina u sustavu **S** (vezanom za Zemlju), $\vec{v}\,'$ brzina u **sustavu S´** (vezanom za autobus), a $\vec{v}_0$ brzina sustava **S´** (autobusa) prema sustavu **S** (Zemlji).

Deriviranjem brzine po vremenu dobivamo akceleracije:

$$\vec{a} = \vec{a}\,'$$

gdje je $\vec{a}$ akceleracija tijela u sustavu **S,** i $\vec{a}\,'$ akceleracija tijela u **S´.**

Prethodne relacije možemo izraziti pomoću komponenata, umjesto u vektorskom obliku:

$$x = x' + v_0 t \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$$

$$v_x = v'_x + v_0 \qquad v_y = v'_y \qquad v_z = v'_z$$

Gornje relacije za koordinate, brzine, vrijeme i akceleracije materijalne točke dvaju inercijskih sustava poznate su kao Galileijeve transformacije.

Galileijeve transformacije vrijede za klasičnu fiziku kada se tijelo (materijalna točka) giba brzinama mnogo manjim od brzine svjetlosti. Za relativističku mehaniku, kada su brzine tijela usporedive s brzinom svjetlosti, ne vrijede Galileijeve transformacije, već se tada primjenjuju Lorentzove transformacije, koje se za male brzine opet svode na Galileijeve.

Drugi Newtonov zakon ima isti oblik u oba inercijska sustava jer je sila na tijelo u sustavu **S** $\vec{F} = m\vec{a}$, a kako je $\vec{a} = \vec{a}'$, a masa ne ovisi o brzini ($m' = m$), to je i $\vec{F}' = m'\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F}$.

Zaključujemo da drugi Newtonov zakon ima isti oblik u oba inercijska sustava.

Primjer 3.6.1. Kolikom brzinom leti galeb s obzirom na Zemlju ako s obzirom na brod, koji plovi brzinom 18 km h^{-1}, leti brzinom 1 m s^{-1} prema pramcu?

$v_0 = 18$ km h^{-1} = 5 m s^{-1}

$v' = 1$ m s^{-1}

$v = ?$ $\qquad v = v' + v_0$ $\qquad v$ = 6 m s^{-1}

3.6.1. Inercijske sile u pravocrtno akceleriranom sustavu

Promatrajmo putovanje autobusom koji se giba jednoliko ubrzano pravocrtno akceleracijom $\vec{a}_0$. Kada autobus ubrzava, putnik u autobusu osjeća silu u suprotnom smjeru od smjera ubrzavanja, prema natrag, a kada autobus usporava, osjeća silu prema naprijed. Znači da za sustav koji se pravocrtno ubrzava ne vrijedi zakon inercije, pa se takav sustav zove neinercijski sustav. Pravocrtno akcelerirani sustavi su neinercijski sustavi. U njima se javlja sila sa smjerom suprotnim od smjera akceleracije akceleriranog sustava, a po veličini je jednaka umnošku mase tijela i akceleracije akceleriranog sustava:

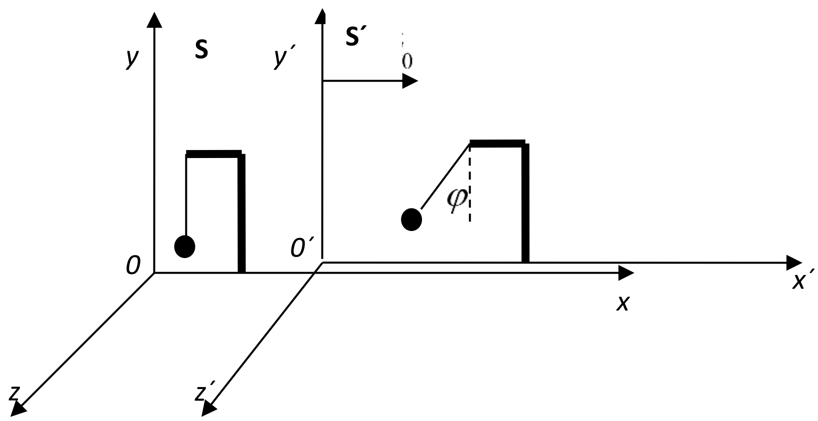
$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

Ta je sila prividna sila jer nije posljedica međudjelovanja dvaju tijela i nema protusilu, a kako je posljedica tromosti tijela, zove se inercijska sila.

Za promatrača na Zemlji (izvan autobusa), zanošenje putnika u akceleriranom sustavu posljedica je tromosti tijela u skladu s prvim Newtonovim zakonom.

Označimo autobus sa **S´** kao neinercijski sustav koji se giba ubrzano pravocrtno stalnom akceleracijom $\vec{a}_0$ prema Zemlji kao inercijskom sustavu **S**. Koordinate materijalne točke u sustavu **S** su *x, y, z*, a u sustavu **S`** *x´, y´, z´*. Veza između koordinata, brzina i akceleracija dana je izrazima:

$$x' = x - v_0 t - \frac{a_0}{2} t^2, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \quad v'_x = v_x - v_0 - a_0 t, \qquad a'_x = a_x - a_0$$



Slika 3.6.3. Inercijska sila u ubrzanim sustavima

Za akceleraciju općenito vrijedi:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$$

Drugi Newtonov zakon imat će isti oblik i za ubrzani sustav S´ ako silama koje nastaju zbog djelovanja drugih sila dodamo inercijsku silu, koja nastaje zbog neinercijalnosti sustava :

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i$$

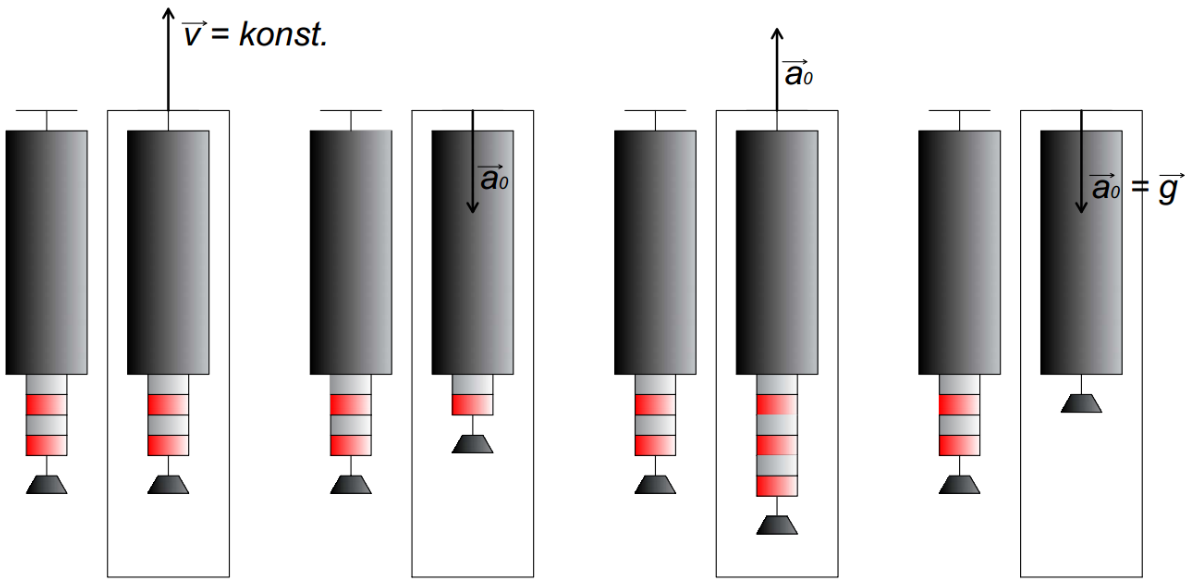
Uzmimo za primjer akceleriranog sustava sustav vezan za dizalo koje se giba akceleracijom $\vec{a}_0$, tj. kada se ubrzava pri pokretanju i usporava pri zaustavljanju. Neka na stropu dizala visi dinamometar s utegom. Kada dizalo miruje ili se giba jednoliko pravocrtno, dinamometar pokazuje težinu utega koja je jednaka sili teži. Ubrzava li se uteg prema gore akceleracijom $\vec{a}_0$, dinamometar pokazuje više negoli kada dizalo miruje. Na tijelo osim vanjskih sila (sila teže i sile opruge) u ubrzanom sustavu vezanom za dizalo djeluje i inercijska sila $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$ (u ovom slučaju sa smjerom prema dolje).

$$\vec{G}' = -\vec{F}_{op} = \vec{F}_G + \vec{F}_i = m\vec{g} - m\vec{a}_0$$

Radi jednostavnosti možemo pisati skalarno:

$$G' = mg + ma_0$$

U dizalu koje bi slobodno padalo, dinamometar s obješenim utegom pokazivao bi da uteg nema težine.



Slika 3.6.4. Težina u dizalu

Primjer 3.6.2. Kolika je inercijska sila koja djeluje na čovjeka mase 80 kg ako pri pokretanju prema dolje vaga na kojoj stoji pokazuje 60 kg? Kolika je akceleracija čovjeka?

Rješenje:

F_G = 800 N

<u>G' = 600 N</u>

F_i = ?

$a_0 = ?$

$$F_i = F_G - G'$$

F_i = 200 N

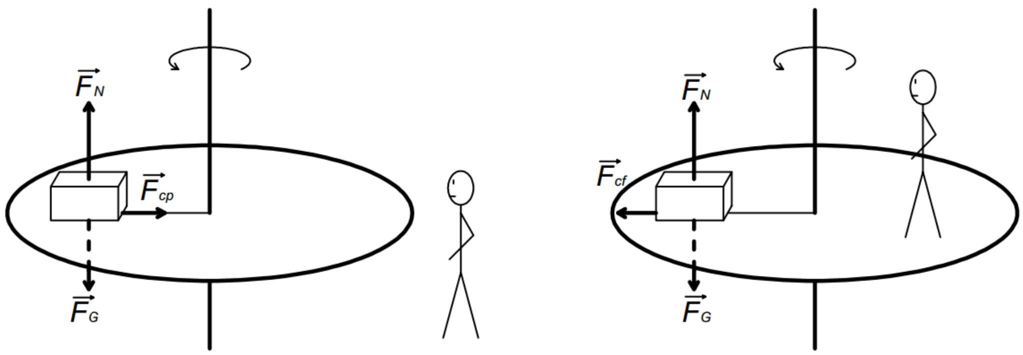
$$a_0 = \frac{F_i}{m}$$

a_0 = 2,5 m s^{-2}

3.6.2. Inercijske sile u kružno akceleriranom sustavu

Da bi se autobus gibao zavojem kružnog oblika, na autobus mora djelovati centripetalna sila. Centripetalna sila je trenje koja autobusu daje centripetalnu akceleraciju, pa je autobus kružno akcelerirani sustav. Za promatrača u autobusu javlja se prividna sila u smjeru od središta zakrivljenosti zavoja, koja nije posljedica djelovanja drugog tijela, pa je kružno akcelerirani sustav također neinercijski sustav, jer u njemu ne vrijedi prvi Newtonov zakon. Ta inercijska sila zove se centrifugalna sila. Centrifugalna sila ima suprotan smjer od centripetalne sile, ali treba napomenuti da se te dvije sile nikada ne javljaju zajedno. Centripetalna sila javlja se za promatrača u sustavu Zemlje (inercijskom sustavu). Znači, centrifugalna i centripetalna sila javljaju se u dva različita sustava, pa ih nikada ne možemo promatrati zajedno. Centrifugalna sila nema protusilu (ona je prividna sila).

Zaključujemo, centripetalna sila javlja se za promatrača u Zemljinom inercijskom sustavu i ona uzrokuje kružno gibanje tijela, a centrifugalna sila javlja se za promatrača koji se nalazi u kružno akceleriranom sustavu, tj. centrifugalna sila javlja se za promatrača koji zajedno s tijelom jednoliko kruži (slika 3.6.5.).



Slika 3.6.5. Inercijski i kružno akcelerirani sustav

Kako smo već rekli, u svim inercijskim sustavima javlja se inercijska sila: $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$

Kružno akcelerirani sustav ima centripetalnu akceleraciju: $\vec{a}_{cp} = \vec{a}_0 = \dfrac{\vec{v}^2}{r}$

pa je izraz za centrifugalnu silu: $\vec{F}_{cf} = \vec{F}_i = -\dfrac{m\vec{v}^2}{r}$

Iako je centrifugalna sila inercijska sila, ona uzrokuje znatne promjene na tijelima u kružno akceleriranim sustavima.

Centrifugalna sila djeluje na vozila koja se gibaju zavojima, i da ne bi došlo do izbacivanja vozila iz zavoja, ceste se na zavojima grade s nagibom. Isto se tako biciklist pri ulazu u zavoj naginje zbog savladavanja centrifugalne sile koja ga izbacuje iz zavoja.

Zbog rotacije Zemlje oko svoje osi javlja se centrifugalna sila i Coriolisova sila. Posljedica centrifugalne sile je spljoštenost Zemlje na polovima i smanjenje težine tijela idući od pola prema ekvatoru.

Coriolisova sila uvijek djeluje okomito na smjer brzine tijela, pri čemu uvijek mijenja njezin pravac i smjer. Ona se najviše očituje pri zračnim ili vodenim tokovima usmjerenim prema sjeveru ili jugu. Rijeke koje na sjevernoj geografskoj širini teku od sjevera prema jugu više deru desnu obalu, a sjeverni vjetrovi skreću prema zapadu. Na južnoj je geografskoj širini obratno. Pri slobodnom padu na Zemljinoj površini na tijelo, uz silu težu, djeluje i Coriolisova sila te uzrokuje otklon tijela prema istoku.

Coriolisova sila dana je izrazom:

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

gdje je m masa tijela, $\vec{v}'$ brzina tijela s obzirom na Zemlju, $\vec{\omega}$ je kutna brzina Zemlje. Smjer joj se može odrediti pravilom za smjer vektorskog produkta, a iznos pomoću izraza:

$$F_C = 2mv'\omega \sin(\vec{v}', \vec{\omega})$$

Ukupna inercijska sila na tijela na Zemlji je zbroj centrifugalne i Coriolisove sile:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{cf} + \vec{F}_C$$

Sustav vezan za Zemljinu površinu zapravo je akcelerirani sustav, jer ima centripetalnu akceleraciju zbog Zemljine rotacije i revolucije. Centripetalna akceleracija zbog Zemljine rotacije najveća je na ekvatoru (0,03 m s^{-2}). Zbog gibanja Zemlje oko Sunca centripetalna akceleracija još je manja, pa je Zemlja uglavnom inercijski sustav.

PITANJA I ZADACI

1. Objasnite referentne sustave. Što je inercijski, a što neinercijski referentni sustav?
2. Izvedite Galileijeve transformacije za dva inercijska sustava.
3. Kada se pojavljuju inercijske sile?
4. Kolika je inercijska sila u jednoliko ubrzanom sustavu?
5. Kolika je težina tijela u sustavu vezanom za dizalo koje se: a) giba jednoliko, b) giba jednoliko ubrzano s akceleracijom $\vec{a}_0$ prema gore i c) jednoliko ubrzano akceleracijom $\vec{a}_0$ prema dolje?
6. Koje se inercijske sile javljaju u sustavu koji se vrti stalnom kutnom brzinom?
7. Što je centrifugalna sila i koliko iznosi?
8. O čemu ovisi Coriolisova sila?

9. Visak obješen na stropu vozila zatvara s vertikalom kut od 12° prema natrag. Kolika je akceleracija vozila i kojeg je smjera?

10. Kolikom silom čovjek mase 100 kg djeluje na pod dizala kada se dizalo diže: a) stalnom brzinom, b) akceleracijom 9,81 m s^{-2} i spušta akceleracijom 9,81 m s^{-2}?

11. Čovjek u dizalu pritišće na pod silom 700 N. Zbog dolaska na sedmi kat dizalo se usporava akceleracijom 1 m s^{-2}. Kolika je masa čovjeka?

12. U epruveti centrifuge nalazi se otopina s dvjema vrstama čestica čije su mase u odnosu $m_2 = 2\,m_1$. Odredite odnos centrifugalnih sila na čestice kada su na istoj udaljenosti od osi. Koje će čestice biti na dnu epruvete nakon centrifugiranja?

4. ENERGIJA I ZAKONI OČUVANJA

4.1. KOLIČINA GIBANJA

Razradimo drugi Newtonov zakon $F = ma$:

$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$F(t_2 - t_1) = mv_2 - mv_1 \qquad (1)$$

Tako smo dobili drugi Newtonov zakon u drugom obliku.

Na lijevoj strani izraza imamo umnožak sile i vremenskog intervala u kojem ta sila djeluje $F\Delta t$.

Na desnoj strani izraza imamo razliku umnožaka mase i brzina na kraju i početku djelovanja sile. Umnožak mase i brzine zove se količina gibanja. To je vektor čiji je smjer jednak smjeru brzine:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [\text{kg m s}^{-1}]$$

Mjerna jedinica količine gibanja je $kg\ m\ s^{-1}$ ili $N\ s$ jer je $N\ s = kg\ m\ s^{-1}$.

Količina gibanja označava osobinu tijela koje se giba. Za svaku promjenu količine gibanja potrebno je da na tijelo neko vrijeme djeluje sila.

Prema izrazu (1) možemo zaključiti da, kada na tijelo tijekom vremenskog intervala Δt djeluje neka sila F, promijeni mu se količina gibanja za Δp, i to u smjeru djelovanja sile, što pišemo:

$$F\Delta t = \Delta(mv)$$

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

Ovaj izraz govori da je umnožak sile i vremenskog intervala jednak promjeni količine gibanja koju je ta sila izazvala.

4.2. ZAKON OČUVANJA KOLIČINE GIBANJA

Izvedimo zakon očuvanja količine gibanja za zatvoreni sustav dvaju tijela, A i B. Neka tijelo A u nekom vremenskom intervalu $t_2 - t_1$ djeluje na tijelo B silom $F_{A,B}$, tada prema trećem Newtonovom zakonu i tijelo B djeluje na tijelo A silom $F_{B,A}$ u istom vremenskom intervalu, pa je:

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A} \qquad (1)$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu gornje jednadžbe s vremenskim intervalom $t_2 - t_1$ u kojem tijela međusobno djeluju:

$$\vec{F}_{A,B}(t_2 - t_1) = -\vec{F}_{B,A}(t_2 - t_1) \qquad (2)$$

Kako smo već definirali, umnožak sile i vremenskog intervala jednak je promjeni količine gibanja. Za tijelo B je:

$$\vec{F}_{A,B}(t_2 - t_1) = m_B\vec{v}_{B2} - m_B\vec{v}_{B1} \qquad (3)$$

m_B je masa tijela B, $\vec{v}_{B1}$ je brzina tijela B u trenutku t_1 i $\vec{v}_{B2}$ je brzina tijela B u trenutku t_2.

Slično vrijedi i za tijelo A:

$$\vec{F}_{B,A}(t_2 - t_1) = m_A\vec{v}_{A2} - m_A\vec{v}_{B1} \qquad (4)$$

m_A je masa tijela A, $\vec{v}_{A1}$ je brzina tijela A u trenutku t_1 i $\vec{v}_{A2}$ je brzina tijela A u trenutku t_2.

Usporedbom izraza (2), (3) i (4) dobivamo:

$$m_B\vec{v}_{B2} - m_B v_{B1} = -(m_A\vec{v}_{A2} - m_A\vec{v}_{A1}),$$

odakle slijedi: $$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = m_A\vec{v}_{A2} + m_B\vec{v}_{B2}$$

Ova relacija predstavlja zakon očuvanja količine gibanje za sustav dvaju tijela koji možemo izreći na slijedeći način: ukupna količina gibanja dvaju tijela u zatvorenom sustavu ne mijenja se tijekom vremena, tj. ostaje konstantna.

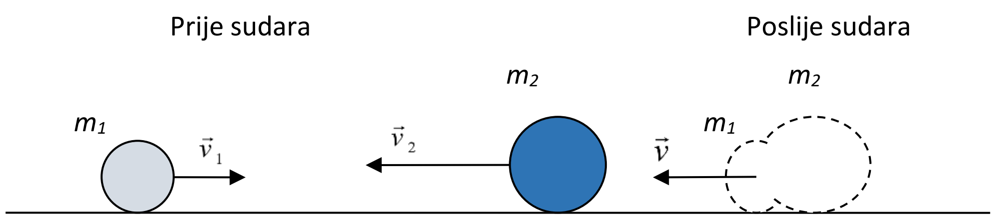
Na sličan način može se izvesti zakon za zatvoreni sustav koji se sastoji od triju i više tijela.

Primjer 4.1. U automobil koji miruje udari kamion mase 3 t brzinom 36 km h^{-1}. Nakon sudara automobil i kamion gibaju se zajedno brzinom 25 km h^{-1}. Kolika je masa automobila?

Rješenje: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$ $\qquad m_1 = \dfrac{m_2 v_2 - m_2 v}{v}$ = 1,32 t

Primjer 4.2. Tijelo mase 4 kg giba se pravocrtno brzinom v_1 = 10 m s^{-1} prije sudara s drugim tijelom mase 10 kg, koje se giba pravocrtno prema prvom tijelu brzinom v_2 = 15 m s^{-1}. Kolika je brzina tijela nakon sudara ako je sudar neelastičan?

Rješenje:



Slika 4.1. Uz primjer 4.2.

Zakon očuvanja količine gibanja u vektorskom obliku:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

Zakon očuvanja količine gibanja u skalarnom obliku:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad v = -7{,}86 \text{ m s}^{-1}$$

Predznak minus znači da će se tijela poslije sudara gibati u suprotnom smjeru od odabranog smjera na slici, tj. tijela će se gibati u smjeru gibanja drugog tijela prije sudara s prvim tijelom.

Zadaci:

1. Ako udarac traje 10 ms, a lopta mase 500 g odleti brzinom 5 m s^{-1}, odredite kolika je srednja sila za vrijeme djelovanja noge na loptu?
2. Molekula vodika brzine 1000 m s^{-1} udari u stjenku posude pod pravim kutom i elastično se odbije. Nađite promjenu količine gibanja molekule.
3. Kako glasi zakon očuvanja količine gibanja?

4.3. RAD I SNAGA

U fizici je rad definiran kao svladavanje sile na određenom putu, za razliku od pojma rada u svakodnevnom životu. Da bismo izračunali koliki je obavljeni rad, moramo poznavati silu koja djeluje na tijelo i način na koji se to tijelo giba.

4.3.1. Rad stalne sile

Neka se pod djelovanjem stalne sile neko tijelo giba pravocrtno u smjeru pravca djelovanja sile. Tada je obavljeni rad jednak umnošku sile i puta koji je tijelo prešlo pod djelovanjem te sile:

$$W = F \cdot s \text{ [N·m = J]}$$

Iz izraza za rad slijedi jedinica za rad. U međunarodnom sustavu jedinica mjerna jedinica za rad je džul [J]. Džul je rad koji izvrši sila 1 N na putu 1 m u smjeru djelovanja sile.

U atomskoj fizici i u još nekim područjima fizike dopuštena jedinica za rad jest elektronvolt (eV): 1 eV = $1{,}6\cdot 10^{-19}$ J.

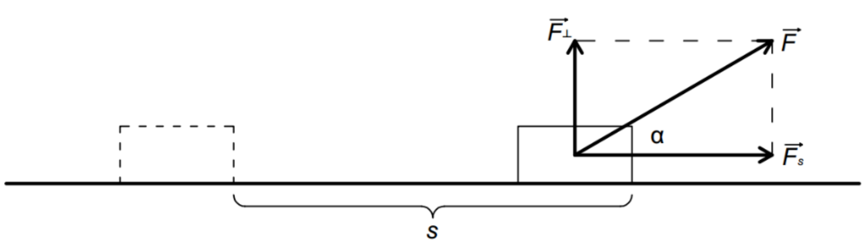
Rad električne struje izražava se u kWh: kWh = 3,6 MJ

Djeluje li sila F ukoso pod nekim kutom α u odnosu na smjer gibanja (put), tada je rad jednak umnošku komponente sile u smjeru puta F_s i puta s (slika 4. 1.):

$$W = F_s \cdot s \qquad F_s = F\cos\alpha \qquad W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$ (skalarni produkt dvaju vektora je skalarna veličina).

Napišemo li silu i put u vektorskom obliku, izraz za rad je: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Napomena: Izraz $\vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha$ jest skalarni produkt vektora $\vec{F}$ i $\vec{s}$ (kako je put s jednak pomaku x, i put je također vektor).



Slika 4.2. Rad sile koja djeluje ukoso u odnosu na smjer gibanja

Rad je skalarna veličina. Može biti pozitivan, negativan i jednak nuli. Ako je $0 < \alpha < 90°$, rad je pozitivan. Ako sila djeluje u smjeru gibanja, rad je pozitivan. Pri padanju tijela, sila teža je u smjeru gibanja, pa je rad sile teže pozitivan. Ako je $\alpha = 90°$, rad je jednak nula. Rad centripetalne sile jednak je nuli. Ako sila djeluje na tijelo, a tijelo se ne giba, rad je također jednak nuli. Ako je

$90° < \alpha < 180°$, rad je negativan. Rad sile koja djeluje u suprotnom smjeru od smjera gibanja je negativan. Rad trenja je negativan.

Primjer 4.3. Radnik vuče kolica prema kamionu. Koliki rad obavi radnik na putu od 30 m ako djeluje silom 500 N, pri čemu je kut između smjera gibanja kolica i ručke za koju radnik vuče kolica 37°?

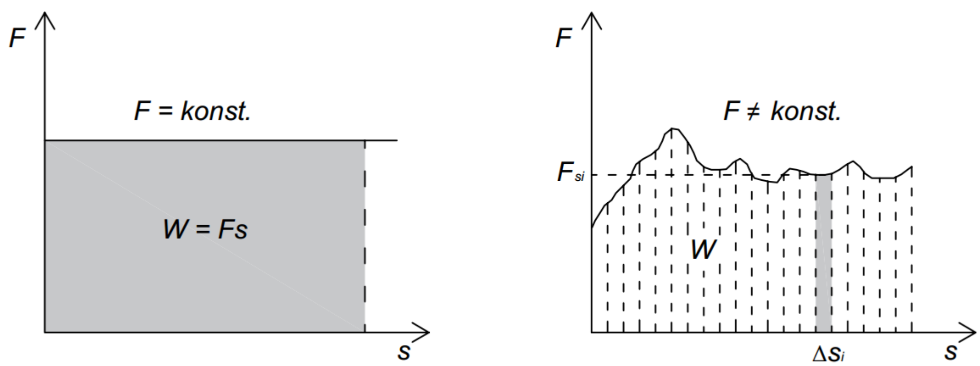
Rješenje:

$$W = Fs\cos\alpha$$

$$W = 11979{,}5 \text{ J}$$

4.3.2. Grafički prikaz rada

Prikažimo stalnu silu koja djeluje na tijelo na putu u smjeru puta kao funkciju puta (u *F*,*s*-koordinatnom sustavu), (slika 4.3. a).



Slika 4.3. Grafički prikaz rada

Budući da je rad umnožak sile i puta, zaključujemo da je površina pravokutnika ispod grafa sile brojčano jednaka radu. Rad je uvijek predočen površinom ispod grafa koji prikazuje ovisnost sile o putu, bez obzira na to kako se sila mijenja duž puta (slika 4.3. b).

Da bismo izračunali rad u općenitom slučaju, ukupni put podijelimo na male dijelove Δs_i. Rad sile na tom malom djeliću bit će jednak površini uskog pravokutnika jer će sila duž pojedinog Δs_i biti gotovo stalna:

$$\Delta W_i = F_{si} \Delta s_i$$

Ukupni je rad:

$$W = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F_{si} \Delta s_i = \int_0^s F_s ds$$

4.3.3. Snaga

Kvocijent obavljenog rada i vremena za koje je rad obavljen nazivamo srednja snaga:

$$\overline{P} = \frac{W}{t} \qquad \text{ili} \qquad \overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

gdje je ΔW obavljeni rad, Δt vremenski interval. Ustvari, snaga je brzina vršenja rada. Stroj koji za kraće vrijeme obavi isti rad, ima veću snagu.

Srednju snagu možemo izraziti i preko sile i srednje brzine:

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = F\overline{v}$$

$$\overline{P} = F\overline{v}$$

Kvocijent rada obavljenog u neizmjerno malenom vremenskom intervalu i tog vremenskog intervala naziva se trenutna snaga ili snaga:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\alpha$$

gdje je α kut između smjera sile i smjera brzine tijela. Snaga je skalarni produkt sile i brzine, pa je snaga, kao i rad, skalarna veličina. Ako je α = 0°, cos 0° = 1, tada je izraz za snagu:

$$P = Fv$$

mjerna jedinica za snagu je wat (W). Stroj će imati snagu 1 W ako rad od 1 J obavi u vremenu od 1 s (W = J s^{-1}). Veće jedinice za snagu su kW = 1000 W, MW =10^6 W, GW = 10^9 W.

Stara jedinica za snagu je konjska snaga KS. Određena je kao snaga potrebna za dizanje mase 75 kg na visinu od 1 m u vremenu od 1s:

$$P = \frac{mgh}{t} = 735{,}5 \text{ W} = 1 \text{ KS}$$

Primjer 4.4. Kamion mase 5 t prije zaustavljanja ima brzinu 72 km h^{-1}. Put zaustavljanja kamiona je 30 m. Kolika je srednja snaga zaustavljanja?

Rješenje:

Srednja brzina, uz pretpostavku da se kamion jednoliko zaustavljao, je:

m = 5 t

v = 72 km h^{-1}

s = 30 m

$$\bar{v} = \frac{v_{poč} + v_{kon}}{2} = \frac{v+0}{2} = \frac{v}{2} = 10ms^{-1}$$

$\overline{P} = ?$

$$\overline{P} = F\bar{v} = ma\frac{v}{2} = m\frac{v^2}{2s}\frac{v}{2} \qquad \overline{P} = \frac{mv^3}{4s} \qquad \overline{P} = 3{,}33 \cdot 10^5 \text{ W}$$

4.3.4. Rad rezultantne sile

Kada na tijelo djeluje više sila, rad rezultantne sile možemo izračunati tako da najprije izračunamo rad pojedinih sila, pa sve radove zbrojimo. Možemo ga izračunati i tako da najprije odredimo rezultantu svih sila (ukupan vektorski zbroj svih sila), a zatim izračunamo rad rezultantne sile za zadano gibanje.

Primjer 4.5.

Koliki rad treba izvršiti da bismo tijelo mase 50 kg digli iz mirovanja visoko 1,5 m, a tijelo bi se pritom dizalo akceleracijom 2 m s^{-2}? (Izračunati rad rezultantne sile i rad sile kojom podižemo tijelo.)

Rješenje:

Želimo li da se tijelo iz mirovanja giba jednoliko ubrzano prema gore, na njega moramo djelovati stalnom silom prema gore većom od težine tijela, tako da je rezultantna sila na tijelo:

$$F_R = F - F_G \quad \text{ili} \quad F_R = ma$$

Rad rezultantne sile je: $W_R = F_R h = mah = ma\frac{at^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = E_K = 150 \text{ J}$

Dakle, rad rezultantne sile pri podizanju tijela na visinu h jednak je kinetičkoj energiji tijela.

Nadalje, izračunajmo rad sile kojom podižemo tijelo. Možemo pisati:

$$(F - F_G)h = E_K\ ; \quad (F - mg)h = \frac{mv^2}{2}\ ; \quad Fh - mgh = \frac{mv^2}{2}\ ; \quad Fh = mgh + \frac{mv^2}{2} = mgh + mah$$

$W = Fh$ je rad sile kojom podižemo tijelo. Jednak je povećanju gravitacijske potencijalne i povećanju kinetičke energije:

$$W = \Delta E_{gp} + \Delta E_k = 900 \text{ J}$$

4.4. ENERGIJA

Energija je sposobnost tijela da može vršiti rad. Postoji više vrsta energije: mehanička, kemijska, nuklearna, električna, toplinska, itd.

Obrađivat ćemo mehaničku energiju. Oblici mehaničke energije su kinetička i potencijalna (gravitacijska i elastična).

4.4.1. Kinetička energija

To je energija koju tijelo ima kada se giba. Da bi se tijelo gibalo jednoliko, ukupna sila na tijelo mora biti jednaka nuli (dovoljno ga je samo pokrenuti, pa da se dalje nastavi gibati stalnom brzinom), a ako na tijelo djeluje stalna sila, tijelu se stalno jednoliko povećava brzina, a time mu se povećava i kinetička energija. Izračunajmo rad sile koja tijelu povećava brzinu iz mirovanja do neke vrijednosti v:

$$W = \int_0^s F ds = \int_0^s mads = \int_0^v m\frac{dv}{dt}vdt = \int_0^v mvdv = m\int_0^v vdv = m\frac{v^2}{2}$$

$$W = \frac{mv^2}{2} = E_k$$

Ako se tijelo giba brzinom v, ima kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Proširimo li gornji izraz s m, dobivamo:

$$E_k = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Povećava li se brzina tijela od početne brzine v_0 do brzine v djelovanjem stalne sile F na nekom dijelu puta od s_1 do s_2, rad potreban za to povećanje je:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds = \int_{v_0}^{v} mvdv = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Zaključujemo da se tijelu povećala kinetička energija s E_{k0} na E_k. Povećanje kinetičke energije jednako je radu:

$$W = E_k - E_{ko} = \Delta E_k$$

Gornji izraz povezuje rad i promjenu kinetičke energije, a naziva se **poučak o radu i kinetičkoj energiji.**

Kinetička energija uvijek je pozitivna. Rad je pozitivan ako se tijelu kinetička energija povećava. Rad je negativan ako se tijelu kinetička energija smanjuje. Rad je jednak nuli ako se kinetička energija ne mijenja.

Primjer 4.6. Na što treba utrošiti više rada: na povećanje brzine na 5 m s^{-1} tijelu mase 5 kg koje stoji ili na povećanje brzine na 10 m s^{-1} istom tijelu koje vozi brzinom 5 m s^{-1}?

Rješenje:

$$W_1 = \Delta E_{k1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad W_1 = 62{,}5 \text{ J} \qquad W_2 = \Delta E_{k2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

$$W_2 = 187{,}5 \text{ J}$$

Vidimo da je $W_2 > W_1$, što intuitivno ne bismo očekivali.

Mjerna jedinica SI-ja za energiju ista je kao i za rad, džul.

Primjer 4.7. Tane mase 20 g, leteći brzinom od 420 m s^{-1}, probije dasku debelu 2 cm. Odredite silu otpora daske ako je tane, nakon što je probilo dasku, nastavilo letjeti brzinom od 120 m s^{-1}?

Rješenje:

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}\ , \qquad Fd = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \qquad F = \frac{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}}{d}\ , \qquad F = -81000 \text{ N}$$

Negativan predznak znači da je sila otpora daske djelovala u suprotnom smjeru od smjera gibanja taneta. Rad sile otpora daske također je negativan jer se kinetička energija taneta smanjivala.

4.4.2. Gravitacijska potencijalna energija

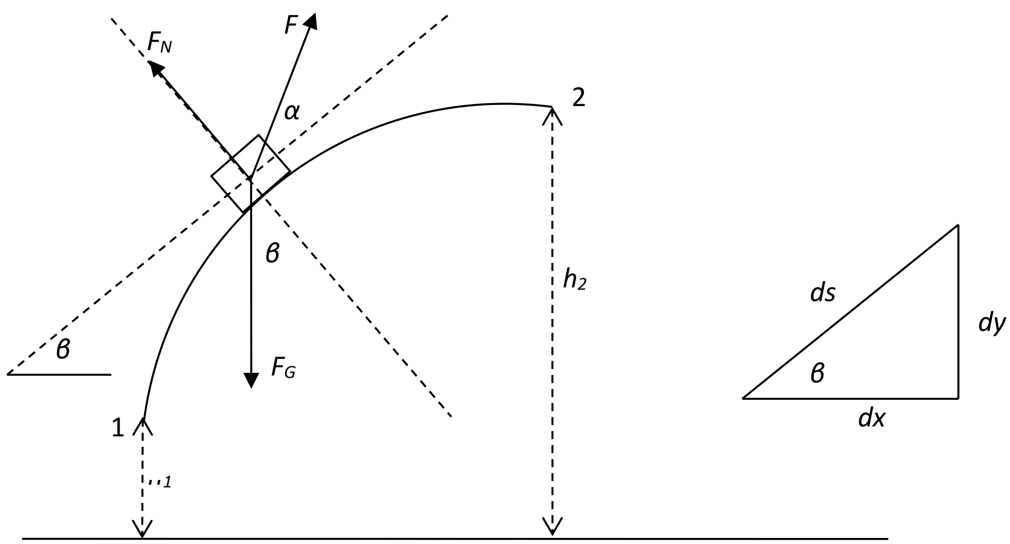
Neka imamo tijelo mase *m* u gravitacijskom polju Zemlje, u blizini njezine površine, koje želimo podići jednoliko vertikalno s visine h_1 na visinu h_2. Sila potrebna za podizanje tijela konstantna je i jednaka težini tijela. Rad potreban za podizanje tijela je:

$$W = F_G(h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1$$

Veličina *mgh* je gravitacijska potencijalna energija. Onda je: $E_{gp} = mgh$

Vidimo da je rad pri podizanju tijela na neku visinu na kojoj će mirovati jednak promjeni gravitacijske potencijalne energije: $W = E_{gp2} - E_{gp1}$ odnosno $W = \Delta E_{gp}$

Pretpostavimo da tijelo nismo dizali vertikalno, nego po bilo kakvoj krivulji (slika 4.4).



Slika 4.4. Uz izvod gravitacijske potencijalne energije

Rad što ga izvrši vanjska sila *F* pomičući tijelo po putanji iz točke 1 u točku 2 je:

$$W = \int_1^2 F \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

Da bi se tijelo pomicalo jednoliko, zbroj sila koje djeluju na tijelo na tangenti mora biti jednak nuli, tj.: $F \cdot \cos\alpha = F_G \cdot \sin\beta$

Sada izraz za rad možemo pisati: $W = \int_1^2 F_G \cdot \sin\beta \cdot ds$

Prema gornjoj slici može se napisati da je infinitezimalni put *ds:* $ds = \dfrac{dy}{\sin\beta}$, gdje je *dy* vertikalna komponenta *ds*.

Uvrštavanjem u izraz za rad dobivamo: $W = \int_1^2 F_G \cdot \sin\beta \cdot \dfrac{dy}{\sin\beta} = \int_1^2 F_G \cdot dy = mgy\Big|_1^2$

$$W = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1)$$

$$W = mgh \quad \text{odnosno} \quad E_{gp} = mgh$$

Možemo zaključiti da rad, odnosno promjena gravitacijske potencijalne energije, pri pomicanju tijela prema gore u odnosu na nultu razinu, ne ovisi o putu kojim smo pomicali tijelo, već samo o početnom i konačnom položaju, tj. o razlici visina ($h = h_2 - h_1$). Sila kojoj rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj točki, zove se konzervativna sila. Takve su gravitacijska, elastična i Coulombova sila. Rad konzervativne sile po zatvorenom putu jednak je nuli.

$$\oint \vec{F}_k d\vec{s} = 0$$

Sile kojima rad između dviju istih točaka ovisi o putu zovemo nekonzervativne ili disipativne sile. To je, primjerice, sila trenja. Rad nekonzervativne sile po zatvorenoj krivulji nije jednak nuli.

Rad konzervativne sile jednak je razlici potencijalnih energija između dva položaja tijela. To predstavlja poučak o radu i potencijalnoj energiji.

Naglasimo da gornji izraz za gravitacijsku potencijalnu energiju vrijedi samo za slučaj u kojem je potencijalna energija u beskonačnosti jednaka nuli, a iz toga slijedi da je potencijalna energija definirana do na razliku.

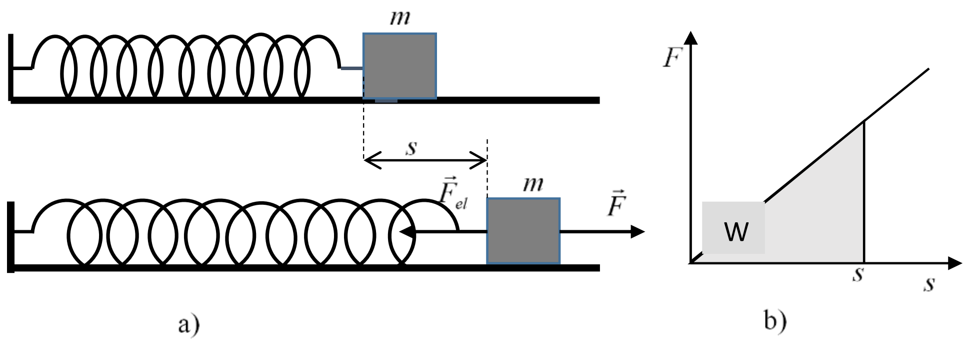
Nadalje se može pokazati da, općenito, za gravitacijsku potencijalnu energiju dvaju tijela vrijedi:

$$E_{gp} = -G\frac{m_1 m_2}{r} \quad , \qquad G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

gdje su m_1 i m_2 mase tijela, *r* njihova udaljenost, *G* univerzalna gravitacijska konstanta.

4.4.3. Elastična potencijalna energija

Tijelo ima elastičnu potencijalnu energiju zbog djelovanja elastične sile. Najočitiji primjeri elastične potencijalne energije su tijelo na elastičnoj opruzi (slika 4.5. a)) ili strijela na napetom luku.



Slika 4.5. Rad pri rastezanju opruge

Rastežemo li oprugu jednoliko (slika 4.5.a), sila kojom djelujemo jednaka je po iznosu, ali je suprotnog smjera elastičnoj sili opruge koju računamo po Hookeovu zakonu $F_{el} = -ks$, tako da je vanjska sila $F = ks$,

gdje je *F* vanjska sila, *k* konstanta opruge, *s* produljenje ili skraćenje opruge (pomak). Rad koji izvrši vanjska sila pri rastezanju opruge iz ravnotežnog položaja za pomak *s* jednak je:

$$W = \int_0^s F ds = \int_0^s ksds = \frac{ks^2}{2}$$

Rad elastične sile opruge jednak je po iznosu, ali suprotnog predznaka, radu vanjske sile:

$$W_{el} = -\frac{ks^2}{2}.$$

Dakle, da bismo oprugu rastegli, moramo obaviti rad. Obavljeni rad jednak je promjeni elastične potencijalne energije:

$$W = \Delta E_{ep}$$

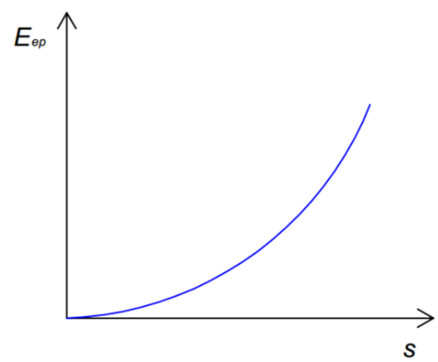
Uzmemo li da je rad elastične potencijalne energije u ravnotežnom položaju nula (s = 0), tada je elastična potencijalna energija opruge:

$$E_{ep} = \frac{ks^2}{2}$$

Elastičnu potencijalnu energiju opruge možemo odrediti i pomoću grafa koji prikazuje ovisnost sile o produljenju opruge (slika 4.5.b). Rad i elastična potencijalna energija predočeni su površinom osjenčanog trokuta:

$$E_{ep} = W = \frac{F \cdot s}{2} = \frac{ks^2}{2}$$

Elastična potencijalna energija tijela na opruzi, a time i elastična potencijalna energija opruge, proporcionalna je kvadratu produljenja (skraćenja) opruge.



Slika 4.6. Ovisnost elastične potencijalne energije o produljenju opruge

Primjer 4.8. Dječak rasteže ekspander (spravu za jačanje mišića) silom 110 N. Duljina nerastegnutog ekspandera je 35 cm, a dječak ga je rastegao na 45 cm. Koliki dodatni rad dječak mora obaviti da bi ga rastegao na 55 cm?

Rješenje:

F_1 =110 N
l_0 = 35 cm
l_1 = 45 cm
l_2 = 55 cm
W = ?

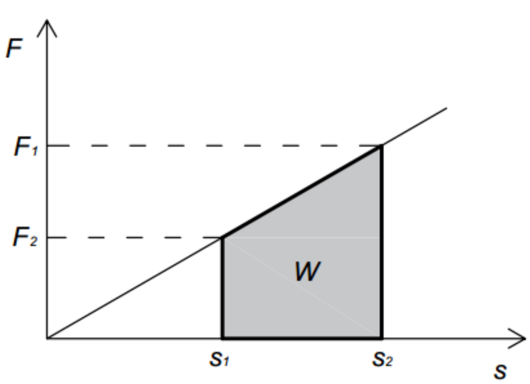
$$s_1 = l_1 - l_0$$
$$s_2 = l_2 - l_0$$

$$k = \frac{F_1}{s_1}$$

$$W = E_{ep2} - E_{ep1}$$

$$W = \frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2$$

$$W = 16{,}5 \text{ J}$$



Slika 4.7. Grafički prikaz rada

4.5. ZAKON OČUVANJA ENERGIJE

Energija se pojavljuje u različitim oblicima: mehanička, električna, nuklearna, kemijska, toplinska, solarna itd. Već otprije znamo da se energija može pretvarati iz jednog oblika u drugi oblik energije, pri čemu je ukupna energija u potpunosti očuvana u izoliranom sustavu. Dakle, za izolirani sustav vrijedi: E = konst.

To je zakon očuvanja ukupne energije.

Kao poseban slučaj, razmotrimo očuvanje energije pri slobodnom padu. Neka se, na početku, tijelo mase m nalazi na visini h_1 i miruje, $v_1 = 0$. Njegova ukupna mehanička energija je:

$$E_{M1} = E_{gp_1} + E_{k1}$$

Kako je $E_{gp_1} = mgh_1$, a $E_{k1} = 0$, jer tijelo miruje, to je ukupna mehanička energija:

$$E_{M1} = mgh_1$$

Kada tijelo, slobodno padajući s visine h_1 prijeđe neki put h, gravitacijska potencijalna energija mu je $E_{gp2} = mg(h_1 - h)$, kinetička $E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(2gh)$, a ukupna mehanička energija:

$$E_{M2} = E_{gp2} + E_{k1}$$

$$E_{M2} = mg(h_1 - h) + \frac{1}{2}m(2gh)$$

$$E_{M2} = mgh_1$$

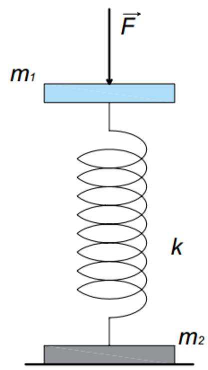
U trenutku kada tijelo padne na tlo, njegova gravitacijska potencijalna energija jest nula, jer je $h_2 = 0$, a kinetička energija je $E_{k3} = \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2gh_1 = mgh_1$, jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji: $E_{M3} = mgh_1$

Zaključujemo da je $E_{M1} = E_{M2} = E_{M3} = E_M = konst.$, tj. da je u svakoj točki slobodnog pada ukupna mehanička energija jednaka zbroju gravitacijske potencijalne i kinetičke energije:

$$E_{gp} + E_k = E_M = konst.$$

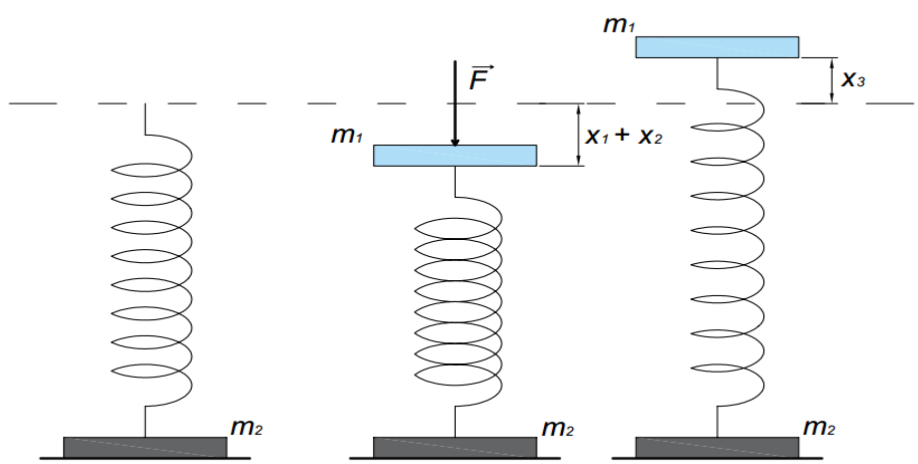
Ukupna mehanička energija je očuvana.

Primjer 4.9. Kolikom najvećom silom F možemo djelovati na tijelo mase m_1 u sustavu prikazanom na slici, a da se pri tome tijelo mase m_2 ne odvoji od podloge nakon što prestane djelovanje sile (slika 4.8.)?



Slika 4.8. Uz primjer 4.9.

Rješenje:



Slika 4.9. Uz rješenje primjera 4.9.

x_1 – skraćenje opruge pod djelovanjem težine tijela mase m_1, pri čemu je: $m_1 g = kx_1$

x_2 – skraćenje opruge pod djelovanjem sile F, pri čemu je: $F = kx_2$

Primjenom zakona očuvanja energije dobivamo: $\frac{1}{2}k(x_1 + x_2)^2 - m_1 g(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}kx^3 + m_1 g x_3$

Da se masa m_2 ne odvoji od podloge, treba biti: $m_2 g \geq kx_3$

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobivamo:

$$\frac{1}{2}k\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - kx_1(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}kx_3^2 + kx_1x_3$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_3^2 - 2x_1x_3 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 = 0$$

U gornju jednadžbu uvrstit ćemo: $x_1 = \dfrac{m_1 g}{k}$ $\quad x_2 = \dfrac{F}{k}$ $\quad x_3 = \dfrac{m_2 g}{k}$

$$-\frac{m_1^2 g^2}{k^2} + \frac{F^2}{k^2} - \frac{m_2^2 g^2}{k^2} - 2\frac{m_1 g}{k} \cdot \frac{m_2 g}{k} = 0$$

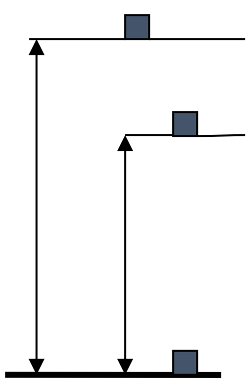
$$F^2 = m_1^2 g^2 + m_2^2 g^2 + 2m_1 m_2 g^2$$

$$F^2 = g^2\left(m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2\right) = g^2\left(m_1 + m_2\right)^2$$

$$F = \left(m_1 + m_2\right)g$$

Primjer 4.10. Tijelo od 2 kg slobodno pada s visine 20 m. Kolike su mu ukupna mehanička, gravitacijska potencijalna i kinetička energija na toj visini, na visini 15 m, i kada padne na zemlju ako se zanemari otpor zraka?

Rješenje:



E_{gp} = *mgh* = 400 J; E_k = 0; E_M = E_{gp} + E_k = 400

E_{gp} = *mgh* = 300 J; E_k =100; E_M = E_{gp} + E_k = 400 J

E_{gp} = *mgh* = 0 J; E_k = 400; E_M = E_{gp} + E_k = 400 J

Slika 4.9.a) Uz primjer 4.10.

Ovo je očuvanje energije pri slobodnom padu ako se zanemari otpor zraka. Poznato je da se, pri otporu zraka ili pri gibanju tijela po podlozi s trenjem, jedan dio mehaničke energije troši na savladavanje otpora zraka ili na trenje, pa je ukupna energija jednaka:

$$E = E_M + W\,,$$

gdje je E ukupna energija, E_M ukupna mehanička energija, W rad pri otporu zraka ili rad sile trenja pri gibanju tijela po podlozi s trenjem. Ovo je zapis zakona održanja ukupne energije koji možemo izreći: ukupna energija ne može se uništiti niti iz čega stvoriti, ona se može samo pretvarati iz jednog oblika u drugi oblik.

Treba naglasiti da zadatke iz Gibanja možemo rješavati i pomoću zakona očuvanja energije, i doći do rješenja na jednostavniji način.

Primjer 4.11. Automobil mase 1100 kg spušta se niz kosinu nagiba 11°. U trenutku kada je brzina automobila 30 m s^{-1}, vozač počinje kočiti.

a) Koliku konstantnu silu kočenja (paralelno s cestom) treba vozač primijeniti da bi se vozilo zaustavilo na putu kočenja od 100 m?

b) Kolika bi ta sila bila kada bi se vozilo gibalo na horizontalnoj cesti istom brzinom?

Rješenje:

Za uspone koji se pojavljuju na cestama $u_{max} \approx 20\%$ možemo pisati: $u = 20\% = tg\alpha$, α = 11,3°, sinα = 0,196 $\approx u$ = tgα; cosα = 0,981 ≈ 1

Ovaj primjer najjednostavnije je riješiti primjenom zakona o očuvanju energije:

a) $W = E_k + E_{gp}$ $\qquad F_k s_k = \frac{mv^2}{2} + mgh$ $\qquad F_k = \frac{mv^2}{2s_k} + \frac{mgh}{s_k}$

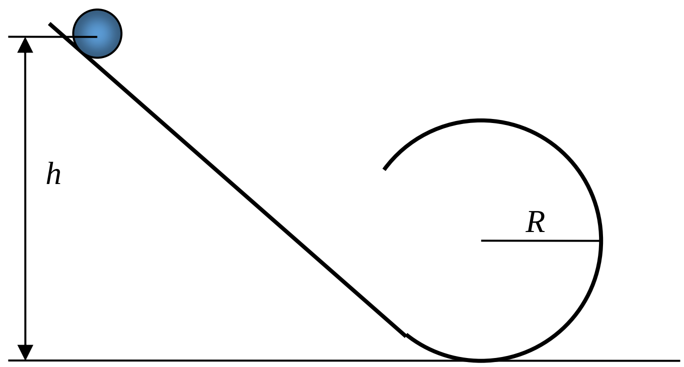
$h = s_k \sin\alpha$ $\qquad F_k = \frac{mv^2}{2s_k} + mg\sin\alpha$ (*) $\qquad F_k$ =7048,9 N

b) α = 0 $\qquad F_k = \frac{mv^2}{2s_k}$ $\qquad F_k$ = 4950 N

Primjer 4.12. Homogeni valjak mase *m* i polumjera *r* spušta se uzduž krivulje prikazane na slici. S koje najmanje visine *h* moramo pustiti valjak da bi prešao kružni dio puta?

Kolika bi ta visina bila kad bi valjak mogli aproksimirati materijalnom točkom?

Rješenje:



Slika 4.10. Uz rješenje primjera 4.12.

Neka je $R >> r$. Primjenom zakona očuvanja energije dobivamo (E_{krot} je kinetička energija rotacije koja će se kasnije definirati):

$$E_{M1} = E_{M2}$$

$$E_{gp1} = E_{gp2} + E_{k2} + E_{krot}$$

$$mgh = mg2R + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad I = \frac{mr^2}{2} \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

Uvjet koji brzina centra mase valjka mora zadovoljiti u najvišoj točki putanje, ako promatramo iz sustava vezanog za valjak (neinercijski sustav jer se valjak giba po kružnoj putanji), jest da je centrifugalna sila jednaka ili veća težini valjka:

$$F_{cf} \geq F_g \qquad \frac{mv^2}{R} \geq mg \qquad v^2 \geq Rg$$

$$mgh = mg2R + \frac{mRg}{2} + \frac{\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{v^2}{r^2}}{2} = mg2R + \frac{mRg}{2} + \frac{mRg}{4}$$

$$h = \frac{11R}{4}$$

Za slučaj materijalne točke zanemaruje se član koji prikazuje rotaciju. Sami provesti za vježbu (rješenje: $h' = \frac{5R}{2}$)

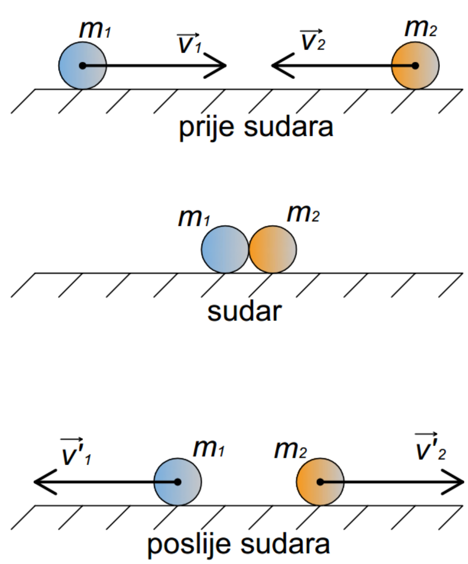
4.6. SUDARI

Do sudara dolazi kada dvije čestice (ili dva sustava čestica) međusobno djeluju približavajući se jedna drugoj i time promijene svoje gibanje. Sudar može biti savršeno elastičan i savršeno neelastičan.

4.6.1. Savršeno elastični sudar

Elastični sudari su oni sudari u kojima je ukupna kinetička energija prije sudara jednaka kinetičkoj energiji poslije sudara, odnosno nema gubitka energije. S obzirom na smjer gibanja čestica prije i poslije sudara, elastični sudar može biti centralni i necentralni. Da bi sudar bio savršeno elastičan, tijela bi morala biti ili savršeno kruta (da ne dođe do deformacije) ili savršeno elastična (da ne dolazi do gubitka energije). Pravi savršeno elastični sudari događaju se samo u mikrosvijetu (sudari molekula plina i sl.).

Promatrajmo centralno savršeni elastični sudar dviju kuglica kao zatvoreni sustav, (slika 4.11.) (njihove brzine leže na istom pravcu nosiocu koji prolazi kroz središte obiju kuglica) masa m_1 i m_2, brzina v_1 i v_2 koje se sudaraju elastično i nakon sudara imaju brzine $\vec{v}_1'$ i $\vec{v}_2'$.



Slika 4.11. Prikaz centralno savršeno elastičnog sudara

Primijenimo zakon očuvanja količine gibanja na ovaj zatvoreni sustav:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,\prime} + m_2\vec{v}_2^{\,\prime} \qquad (1)$$

A budući da je sudar savršeno elastičan, ukupna kinetička energija prije sudara jednaka je ukupnoj kinetičkoj energiji poslije sudara:

$$\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2^2}{2}=\frac{m_1\vec{v}_1^{'2}}{2}+\frac{m_2\vec{v}_2^{'2}}{2} \qquad (2)$$

Ako se jednadžba (2) preoblikuje, dobiva se:

$$m_1(\vec{v}_1^2-\vec{v}_1^{'2})=-m_2(\vec{v}_2^2-\vec{v}_2^{'2}) \qquad (3)$$

Preuređivanjem jednadžbi (1) i (3) dobiva se izraz za relativnu brzinu prije sudara, koja je jednaka po iznosu, ali je suprotnog smjera od relativne brzine nakon sudara:

$$\vec{v}_1-\vec{v}_2=-(\vec{v}_1^{'}-\vec{v}_2^{'}) \qquad (4)$$

Pomoću jednadžbi (1) i (4) mogu se izračunati brzine poslije sudara $\vec{v}_1{}'$ i $\vec{v}_2{}'$ koje iznose:

$$\vec{v}_1^{'}=\frac{(m_1-m_2)\vec{v}_1+2m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2} \qquad (5)$$

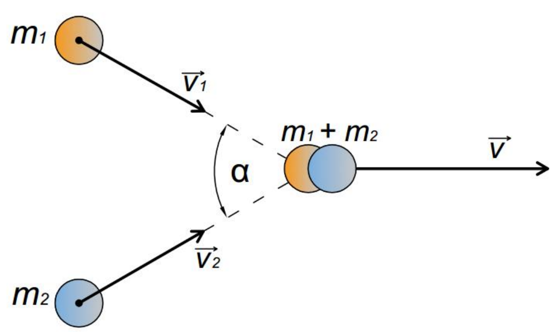
$$\vec{v}_2^{'}=\frac{(m_2-m_1)\vec{v}_2+2m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} \qquad (6)$$

Također postoje tri posebna slučaja kod savršeno elastičnih sudara, a to su:

1. Kada su mase kuglica jednake, tada kuglice jednostavno zamijene brzine. Ako druga kuglica miruje, tada poslije sudara prva kuglica stane, dok druga odleti brzinom koju je prije sudara imala prva kuglica.
2. Kada savršeno elastična kuglica udara vrlo veliku kuglu ili savršeno elastični zid, tada se kuglica odbija jednakom brzinom kojom je i došla, dok zid ne dobiva energiju jer kuglica prilikom sudara ne mijenja energiju.
3. Kada vrlo velika kugla udari u kuglicu koja miruje, brzina joj se vrlo malo promijeni, dok lagana kuglica odleti brzinom dva puta većom od brzine udarne kuglice.

4.6.2. Savršeno neelastičan sudar

Neelastični sudari su oni sudari kod kojih dolazi do gubitka energije zbog različitih razloga (topline, deformacije tijela i sl.). Pri savršeno neelastičnom sudaru, nakon sudara kugle se deformiraju, slijepe jedna uz drugu i nastavljaju gibanje zajedničkom brzinom (slika 4.12.). Pri ovakvom sudaru, kinetička energija nije očuvana jer se jedan njezin dio utroši na promjenu unutrašnje energije.



Slika 4.12. Neelastični sudar

Pomoću zakona očuvanja količine gibanja dobiva se formula za brzinu nakon sudara $\vec{v}'$:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}' \tag{7}$$

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{8}$$

Ukupna kinetička energija prije sudara iznosi:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{9}$$

Dok je ukupna kinetička energija poslije sudara jednaka:

$$E_k' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 \tag{10}$$

Razlika između konačne i početne kinetičke energije označava se sa Q, a iznosi:

$$Q = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \tag{11}$$

Primjer 4.13. Kolika će biti brzina dviju kuglica jednakih masa nakon neelastičnih sudara?

Rješenje:

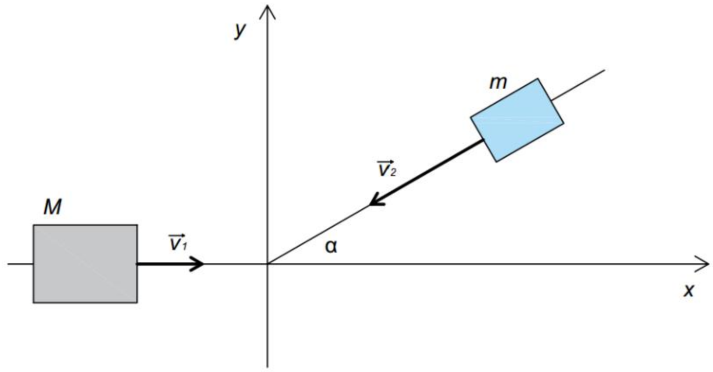
Primjenom izraza (8): Kada se sudare dvije kuglice jednake mase, brzina nakon sudara bit će jednaka polovici vektorskog zbroja brzina prije sudara.

Primjer 4.14. Što se događa kada kuglica od gline padne na tlo, a što kada se komad željeza na nakovnju udara čekićem?

Rješenje:

Kada kuglica od gline padne na tlo, ondje i ostane. Kada se komad željeza na nakovnju udara čekićem, kinetička energija čekića pretvara se u energiju deformacije komada željeza i u unutrašnju energiju, pa se željezo zagrijava.

Primjer 4.15. Kamion mase M = 9000 kg giba se brzinom v_1 = 5 m s^{-1} u smjeru osi + x. Kamion se sudara s putničkim automobilom mase m = 1000 kg koji se giba brzinom v_2 = 20 m s^{-1} pod kutom α = 30° u odnosu na os x (slika 4.13.). Izračunati brzinu i smjer gibanja vozila nakon što su se u sudaru spojila.



Slika 4.13. Uz primjer 4.15.

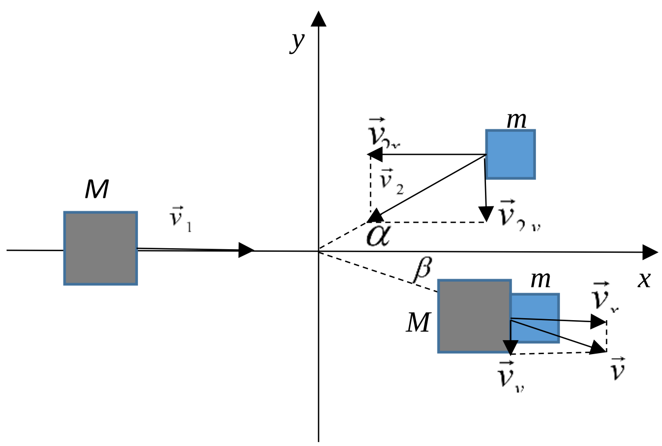
Rješenje:

Zadatak rješavamo primjenom zakona očuvanja količine gibanja. Napisat ćemo ove jednadžbe tako da količine gibanja vozila rastavimo na komponente u smjeru osi *x* i *y* (slika 4.14.).

Os x: $Mv_1 - mv_2\cos\alpha = (M+m)v_x$ $\qquad v_x = \dfrac{Mv_1 - mv_2\cos\alpha}{(M+m)}$ = 2,76 m s^{-1}

Os y: $-mv_2\sin\alpha = (M+m)v_y$ $\qquad v_y = \dfrac{-mv_2\sin\alpha}{(M+m)}$ = -1 m s^{-1}

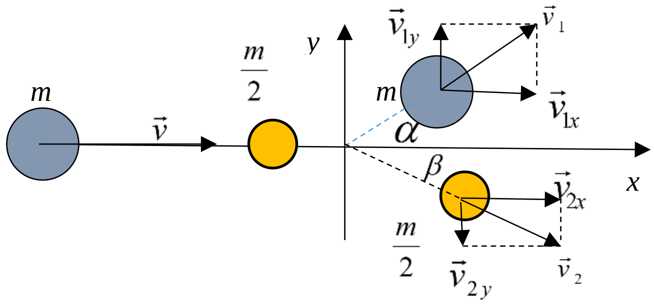
Brzina nakon sudara: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ = 2,94 m s^{-1} $\qquad tg\beta = \dfrac{v_y}{v_x}$ = 0,362 $\qquad \beta$ =*19,92°*



Slika 4.14. Uz rješenje primjera 4.15.

Nakon sudara vozila se gibaju zajedničkom brzinom *v* = 2,94 m s^{-1} pod kutom β = 19,92° u odnosu na os *x*. (Sudar vozila približno je neelastičan sudar).

Primjer 4.16. Kuglica mase *m* giba se brzinom *v* i naleti na mirujuću kuglicu mase $\frac{m}{2}$. Poslije elastičnog sudara, kuglica mase *m* giba se pod kutom α = 30° u odnosu na prvobitni pravac gibanja. Odredite brzine kuglica nakon sudara.



Slika 4.15. Uz primjer 4.16.

Rješenje:

Zakon očuvanja količine gibanja:

X – os $$m_1 v = m_1 v_1 \cos\alpha + m_2 v_2 \cos\beta \qquad (1)$$

Y - os $$0 = m_1 v_1 \sin\alpha - m_2 v_2 \sin\beta \qquad (2)$$

Zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (3)$$

Uvrštavanjem zadanih podataka dobivamo:

$$mv = mv_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{m}{2} v_2 \cos\beta \qquad (1)$$

$$0 = mv_1 \frac{1}{2} - \frac{m}{2} v_2 \sin\beta \qquad (2)$$

$$mv^2 = mv_1^2 + \frac{m}{2} v_2^2 \qquad (3)$$

Nepoznanice u gornjim jednadžbama su: v_1, v_2 i kut β. Rješavamo sustav:

Iz (2) $$\sin\beta = \frac{v_1}{v_2} \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}} \rightarrow (1)$$

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{v_2}{2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}}$$

$$v - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 = \frac{v_2}{2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}} \quad \Big| \text{ kvadriramo}$$

$$v^2 - 2v\frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + \frac{3}{4} v_1^2 = \frac{v_2^2}{4}\left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) \quad \Big| \cdot 4$$

$$4v^2 - 4\sqrt{3}vv_1 + 3v_1^2 = v_2^2 - v_1^2 \qquad (1)$$

Iz (3) $\rightarrow$ $mv^2 = mv_1^2 + \frac{m}{2}v_2^2$ $\qquad 2v^2 - 2v_1^2 = v_2^2 \qquad v_2^2 = 2v^2 - 2v_1^2 \rightarrow (1)$

$$4v^2 - 4\sqrt{3}vv_1 + 3v_1^2 + v_1^2 = 2v^2 - 2v_1^2 \qquad 6v_1^2 - 4\sqrt{3}vv_1 + 2v^2 = 0$$

Rješavamo kvadratnu jednadžbu po nepoznanici v_1:

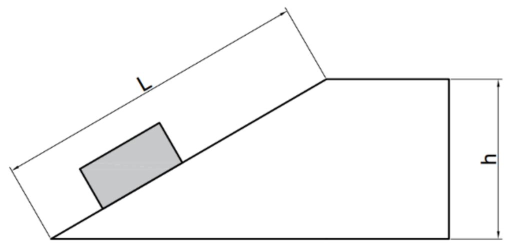
$$(v_1)_{1,2} = \frac{4\sqrt{3}v \pm \sqrt{16\cdot 3v^2 - 4\cdot 6\cdot 2v^2}}{12} = \frac{4\sqrt{3}v \pm 0}{12}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}v \qquad v_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}v \qquad \sin\beta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \qquad \beta = 30°$$

PITANJA I ZADACI

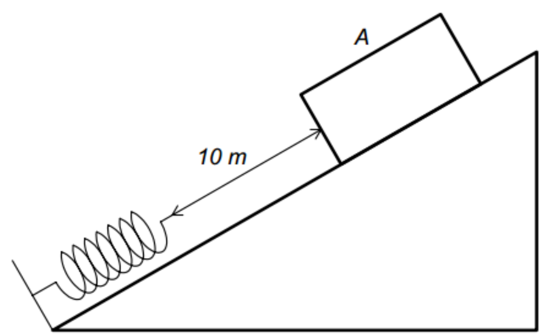
1. Što je rad i kako se računa? Kojim se jedinicama izražava?
2. Prikažite u (F,s) dijagramu rad stalne sile i rad promjenjive sile.
3. Izračunajte rad potreban za dizanje čestice mase m u polju sile teže.
4. Koliki je rad potreban za produženje opruge?
5. Izračunajte rad sile trenja.
6. Što je energija i u kojim se oblicima pojavljuje? Objasnite pojmove kinetičke i potencijalne energije.
7. Izvedite izraz za kinetičku energiju.
8. Izvedite izraz koji povezuje rad vanjskih sila i promjenu energije sustava.
9. Kako glasi zakon očuvanja energije? Izvedite zakon očuvanja mehaničke energije.
10. Prikažite zakon očuvanja mehaničke energije na primjeru slobodnog pada i pomoću njega izračunajte brzinu tijela koje slobodno pada s visine h.
11. Kako se računa snaga i kojim se jedinicama izražava?
12. Definirajte količinu gibanja čestice. Kako se računa količina gibanja kad je brzina čestice usporediva s brzinom svjetlosti?
13. Na tijelo djeluje stalna sila i u vremenu 10 s poveća mu se količinu gibanja s 20 kg m s^{-1} na 30 kg m s^{-1}. Izračunajte tu silu.
14. Što je elastični, a što neelastični sudar?
15. Izračunajte brzine nakon sudara dviju elastičnih kugli. Razmotrite razne posebne slučajeve.
16. Izračunajte brzinu nakon neelastičnog sudara dvaju tijela.
17. Koliko se umanji mehanička energija pri neelastičnom sudaru dvaju tijela?
18. Tijelo mase 2 kg bačeno je koso prema gore s visine 20 m iznad Zemljine površine početnom brzinom 5 m s^{-1}. Kolika mu je tada ukupna mehanička energija i gravitacijska potencijalna i kinetička energija? Kolika će mu biti brzina i ukupna mehanička energija na visini 5 m?

19. Tijelo mase 2 kg bačeno je prema dolje s visine 20 m iznad površine Zemlje početnom brzinom 2 m s^{-1}. Tijelo je udarilo u zemljinu površinu brzinom 10 m s^{-1}. Odredite koliko se energije utrošilo na svladavanje otpora zraka?
20. Koliki će put prevaliti saonice po horizontalnoj podlozi ako su se spustile s visine 20 m i nagiba 32°? Faktor trenja je 0,5.
21. Čovjek gura tijelo mase *m* uz kosinu duljine *L* i obavi rad W_1. Kosina je nagnuta prema horizontalnoj ravnini pod kutom od 30°. Zatim isti teret mase *m* podiže vertikalno na visinu *h* i obavi rad W_2 (slika). Koliki je omjer radova $\frac{W_1}{W_2}$ ako se sila trenja zanemari?



Slika 4.16. Uz zadatak 19.

22. Tijelo mase 50 kg u položaju A ima brzinu 10 m s^{-1} i klizeći 10 m niz kosinu, koja se za svakih 5 m puta uzdiže za 3 m, udari u oprugu konstante elastičnosti 2000 N m^{-1}. Za koliko će se opruga sabiti ako je faktor trenja između tijela i kosine 0,2?



Slika 4.17. Uz zadatak 20.

23. Teret mase 8 t podiže dizalica snage 15 kW na visinu 20 m u vremenu 3 minute. Izračunajte djelotvornost dizalice.

24. Koliko je vremena potrebno da se teret mase 700 kg podigne dizalicom snage 30 kW na visinu 70 m ako je djelotvornost 70 %?

25. Cesta od morske obale u Senju do prijevoja Vratnik na Velebitu, poznata po svojim serpentinama, dugačka je 14 km. Koliki je mehanički učinak ceste ako znamo da je Vratnik na nadmorskoj visini 698 m? Koliki je prosječni kut nagiba ceste prema horizontali? (20,1; 2,9°)

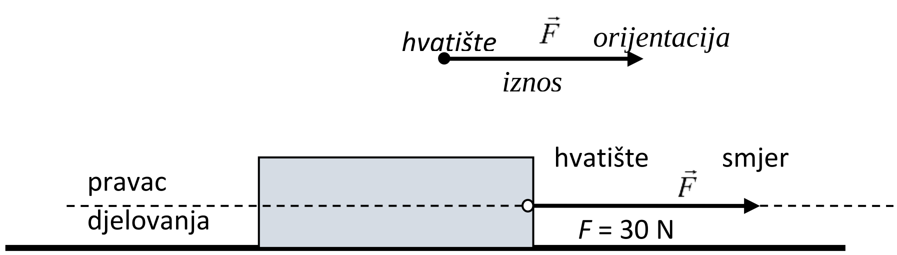
5. STATIKA KRUTOG TIJELA

5.1. DJELOVANJE SILA NA KRUTO TIJELO

Statika je dio mehanike koji proučava uvjete ravnoteže tijela. Za tijelo koje miruje, za tijelo koje se giba jednoliko po pravcu, za tijelo koje jednoliko rotira, za tijelo koje istodobno izvodi jednoliko gibanje po pravcu i jednoliko rotira kažemo da je u ravnoteži. Kada kažemo da je tijelo u ravnoteži, najčešće mislimo da miruje. To nije jedina ravnoteža. Tijelo je u ravnoteži i onda kada se giba jednoliko po pravcu ili jednoliko rotira ili oboje u odnosu na neki referentni sustav. Ravnotežu mirnog tijela nazivamo statičkom, a tijela koje se giba dinamičkom.

Tijelo će biti u ravnoteži (mirovati) ako na njega ne djeluje vanjska sila (prvi Newtonov zakon) ili ako je moment vanjskih sila jednak nuli. Na Zemlji nije moguće ostvariti uvjete da na tijelo ne djeluje ni jedna sila jer uvijek djeluje sila teža. Međutim, ravnoteža krutog tijela moguća je i uz istodobno djelovanje više sila.

Djelovanje sile na kruto tijelo prikazujemo vektorom koji je određen: **iznosom** (veličinom), **smjerom (orijentacijom, usmjerenjem), pravcem djelovanja** (pravac na kojem vektor sile leži), i **hvatištem** (točka u kojoj sila djeluje na kruto tijelo) (slika 5.1.).



Slika 5.1. Sila kao vektor

Hvatište sile koja djeluje na kruto tijelo može se pomicati duž pravca djelovanja, njezin učinak neće se promijeniti (sila je klizni vektor). Silom možemo djelovati bilo gdje na pravcu djelovanja (tijelo možemo gurati, vući, vući vezano za duže ili kraće uže).

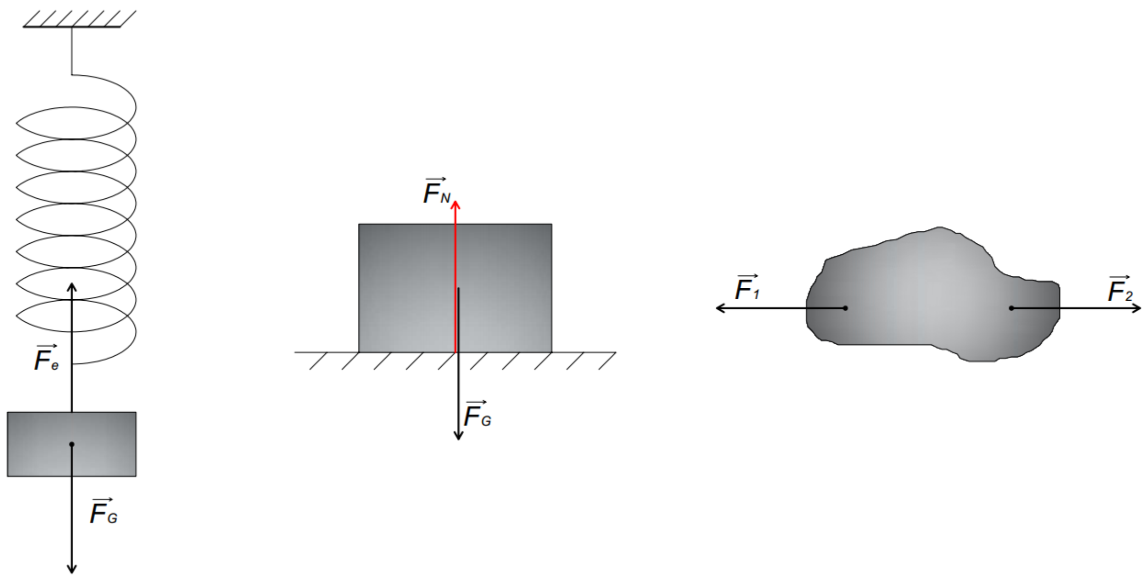
Sile koje djeluju iz iste točke zovu se **konkurentne** sile. Ako tri i više sila djeluje iz iste točke u istoj ravnini, tada su to **konkurentne komplanarne** sile. Ako više sila djeluje na kruto tijelo i nemaju zajedničko hvatište, a pravci djelovanja sijeku im se u istoj točki, to su također **konkurentne** sile.

Ako se pravci djelovanja sila ne sijeku u istoj točki, tada su sile **nekonkurentne** (paralelne sile primjer su nekonkurentnih sila).

5.2. RAVNOTEŽA KRUTOG TIJELA NA KOJE DJELUJE VIŠE SILA

Kada na kruto tijelo djeluju dvije sile koje leže na istom pravcu djelovanja, kruto tijelo bit će u ravnoteži ako su te sile jednakog iznosa, a suprotnih orijentacija (suprotnog smjera) (slika 5.2). Rezultanta tih sila je nula, odnosno vektorski zbroj tih dviju sila koje uravnotežuju tijelo je nula:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



Slika 5.2. Primjeri ravnoteže krutog tijela na koje djeluju dvije sile

Ako na tijelo djeluju dvije sile kojima je hvatište zajedničko, a pravci djelovanja različiti, one se uravnotežuju trećom silom koja je po veličini jednaka, a po smjeru suprotna njihovoj rezultanti.

Rezultantu možemo dobiti **računski** kao i kod materijalne točke (slika 5.3.) tako da sile vektorski zbrojimo ili **grafički** (pravilo paralelograma, pravilo trokuta, poligon sila).

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

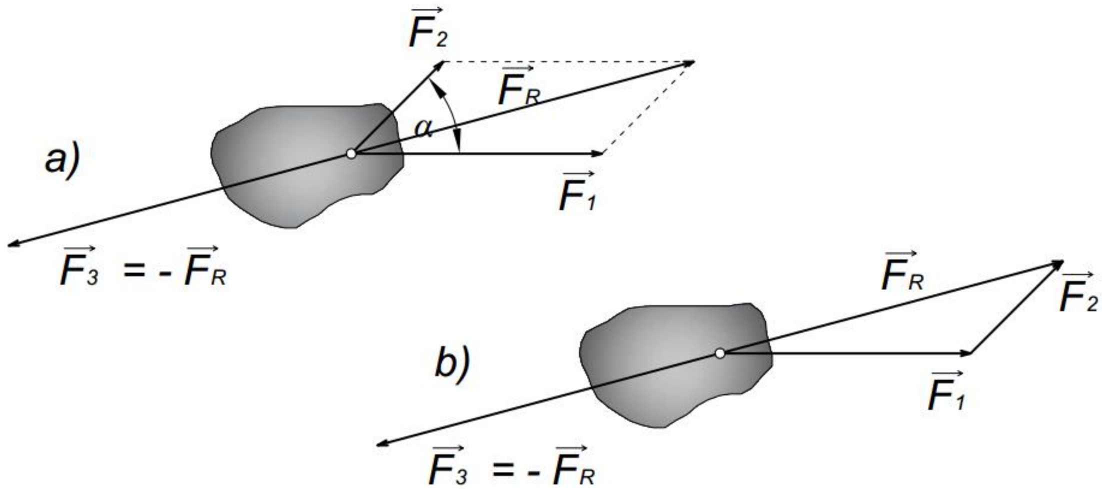
Da bi tijelo bilo u ravnoteži, moramo djelovati trećom silom $\vec{F}_3$ jednakog iznosa kao rezultanta $\vec{F}_R$, a suprotnog smjera rezultanti:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_R$$

Iznos rezultante računamo po formuli:

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_1 F_2 \cos\alpha$$

gdje je α kut između sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.



5.3. Ravnoteža krutog tijela na koje djeluju tri sile

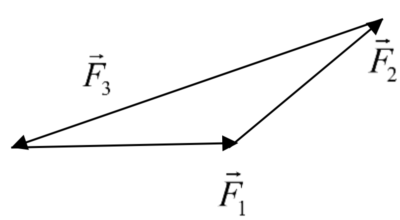
a) pravilo paralelograma, b) pravilo trokuta

Uočimo još da bi rezultanta sila na slici 5.3. bila jednaka nuli i kada se hvatišta sila ne bi nalazila u istoj točki. Zbog toga što je sila klizni vektor, dovoljno je da se pravci djelovanja sijeku u istoj točki.

Možemo zaključiti da će tijelo na koje djeluju tri konkurentne i komplanarne sile biti u ravnoteži ako je vektorski zbroj tih sila jednak nuli:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

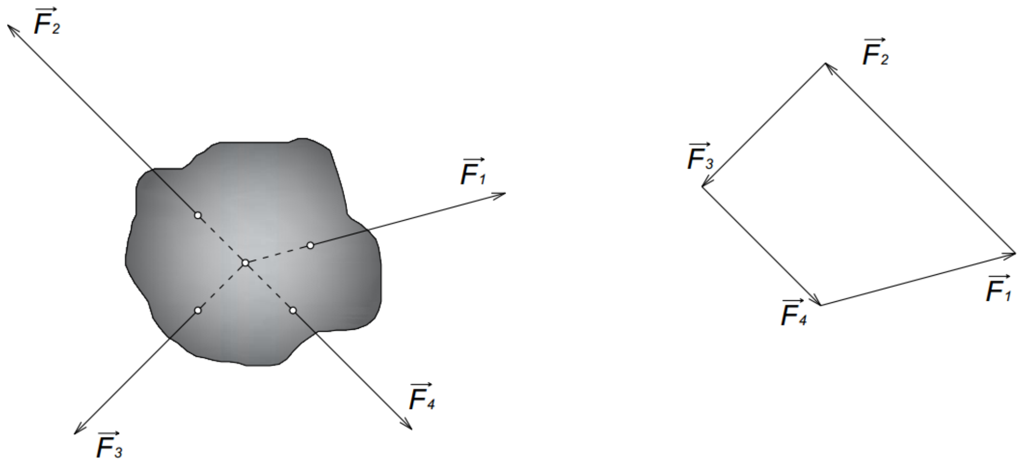
Grafičkim zbrajanjem tih triju sila sa slike 5.3. dobivamo zatvoreni vektorski trokut, kao na slici 5.4.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Slika 5.4. Zatvoreni vektorski trokut sila

Ako na tijelo djeluju više od tri konkurentne komplanarne sile, tijelo je u ravnoteži kada je vektorski zbroj tih sila jednak nuli ili kada je vektorski poligon sačinjen od tih sila zatvoren (sl. 5.5).



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

Slika 5.5. Zatvoreni vektorski poligon sila

Općenito možemo zaključiti: Sustav sila koje djeluju u različitim točkama krutog tijela, a kojima se pravci nosioci sijeku u jednoj točki, možemo svesti na sustav sila što djeluju u jednoj točki (materijalnoj točki), pri čemu njihov vektorski zbroj mora biti jednak nuli:

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

što je ekvivalentno:

$$\sum_i F_{ix} = 0 \qquad \sum_i F_{iy} = 0 \qquad \sum_i F_{iz} = 0$$

Primjer 5.1. Automobil mase 5 t u ravnoteži je na kosini nagnutoj pod kutom od 25°. Izračunajte silu koja djeluje paralelno uz kosinu i silu kojom podloga djeluje na automobil. Trenje zanemarite.

Rješenje:

m = 5 t

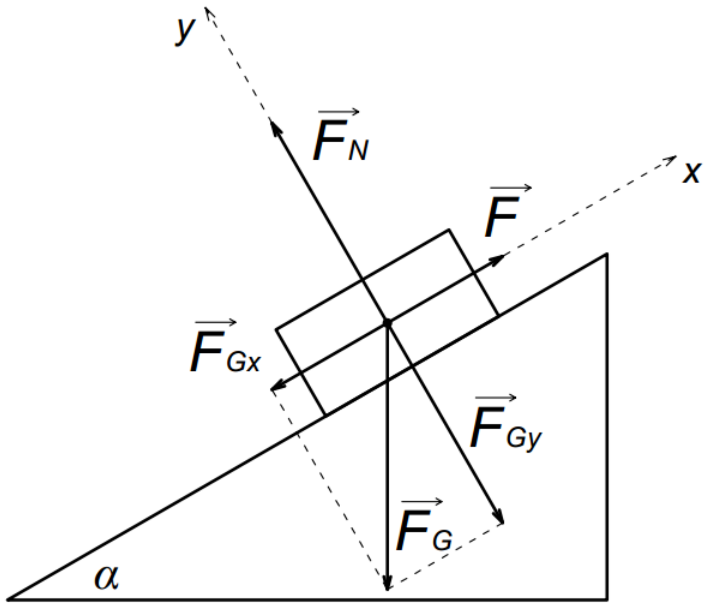
α = 25°

F = ?

F_N = ?

Hvatišta svih sila koje djeluju na automobil možemo pomicati po pravcu nosiocu tako da sve sile djeluju iz jedne točke (materijalne točke), pa se ovaj primjer može svesti na ravnotežu materijalne točke.

Na automobil na kosini djeluju sila teža $\vec{F}_G$, sila $\vec{F}$ i sila kojom podloga djeluje na tijelo $\vec{F}_N$.



Slika 5.6. Ravnoteža na kosini

Uvjet ravnoteže je: $\vec{F}_G + \vec{F} + \vec{F}_N = 0$

Te tri sile jesu konkurentno komplanarne sile, pa vrijedi:

$$\vec{F}_{Gx} + \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_{Gy} + \vec{F}_N = 0$$

odnosno:

$$F = F_G \sin\alpha = mg\sin\alpha = 20{,}7kN$$

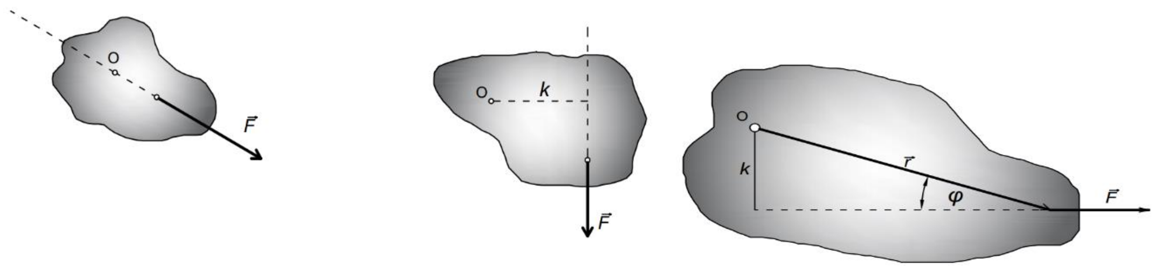
$$F_N = F_G \cos\alpha = mg\cos\alpha = 44{,}5kN$$

5.3. MOMENT SILE

Zbog utjecaja vanjske sile kruto tijelo može translatirati ili se rotirati oko neke točke koja se zove os rotacije. Rotacija tijela zbog djelovanja sile opisuje se **momentom sile ili zakretnim momentom**. Iznos momenta sile jednak je umnošku sile i kraka sile:

$$M = kF$$

Jedinica momenta sile je N m.
Krak sile je okomita udaljenost od pravca djelovanja sile do osi rotacije.



Slika 5.7. Uz definiciju momenta sile

Moment sile može biti pozitivan i negativan. Moment sile pozitivan je ako uzrokuje rotaciju u suprotnom smjeru od smjera kazaljki na satu.

Moment sile vektorska je veličina čiji smjer određujemo pravilom desne ruke: ako prste desne ruke savijemo u smjeru vrtnje, tada ispruženi palac pokazuje smjer momenta sile.

Moment sile ili zakretni moment prema slici 5.7. možemo pisati:

$$M = kF = rF \sin\varphi$$

Kako su $\vec{r}$ i $\vec{F}$ vektori, a ovdje imamo umnožak njihovih iznosa i sinusa kuta među njima, radi se o vektorskom umnošku, što zapisujemo:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Djeluje li na tijelo više sila, ukupni moment nalazimo vektorskim zbrajanjem pojedinih momenata. Jednostavnije je računati s momentima kao s algebarskim veličinama prema navedenom dogovoru za predznake.

Napomenimo da neki vijci na strojevima moraju biti zavijeni točno propisanim momentom sile, čije se vrijednosti nalaze u priručniku za stroj koji se popravlja.

5.4. DJELOVANJE PARALELNIH SILA NA KRUTO TIJELO

Sile koje djeluju na kruto tijelo, a nemaju zajedničko hvatište, zovu se nekonkurentne sile. Takve sile djeluju na paralelnim pravcima (slika 5.8.). Te sile izazivaju istodobno translaciju linearnom akceleracijom u smjeru rezultantne sile i rotaciju kutnom akceleracijom u smjeru rezultantnog momenta na kruto tijelo. Rezultanta više paralelnih sila koja bi izazvala translaciju mora biti jednaka vektorskom zbroju tih sila:

$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$, što kraće zapisujemo: $\vec{F}_R = \sum_i^n \vec{F}_i$

Iznos rezultante dobivamo zbrajanjem iznosa komponenata, uzimajući pritom komponente u jednom smjeru pozitivnima, a u suprotnom smjeru negativnima.

Da bismo odredili položaj pravca djelovanja rezultante, moramo izračunati moment svake od sila, a dobivene momente algebarski zbrojiti:

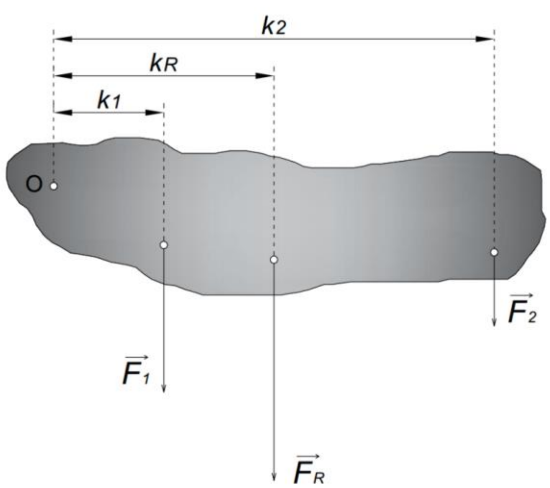
$$M_R = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$$

$$F_R k_R = F_1 k_1 + F_2 k_2 + \ldots + F_n k_n$$

$$k_R = \frac{F_1 k_1 + F_2 k_2 + \ldots + F_n k_n}{F_R} \qquad \text{ili kraće:} \qquad k_R = \frac{\sum_i^n F_i k_i}{F_R},$$

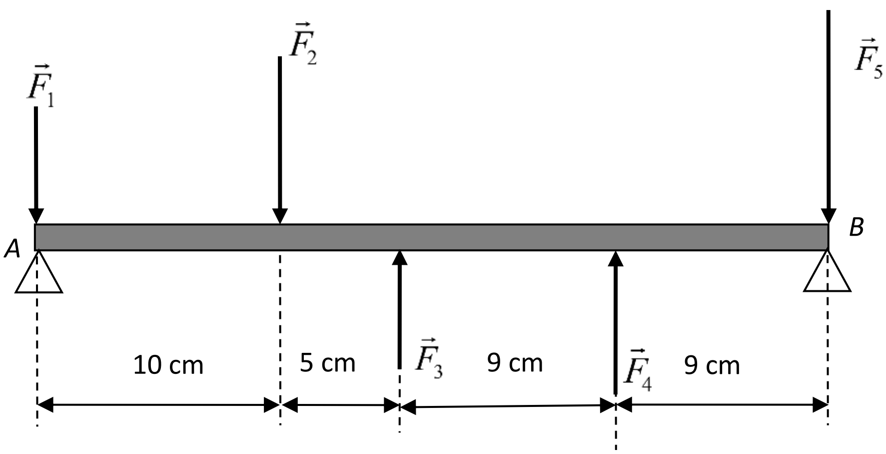
gdje su k_R, k_1, k_2 …krakovi sila, odnosno udaljenosti položaja njihovih pravaca djelovanja od proizvoljno odabrane točke (osi rotacije).

Ako na tijelo djeluju dvije paralelne sile, jednake po veličini, a suprotnih smjerova, njihova rezultanta je nula, pa se navedena razmatranja na njih ne mogu primijeniti. Radi se o paru sila, što treba posebno razmatrati.



Slika 5.8. Djelovanje paralelnih sila na kruto tijelo

Primjer 5.2. Odrediti rezultantu sustava paralelnih sila F_1 = 40 N, F_2 = 60 N, F_3 = 50 N, F_4 = 60 N, F_5 = 80 N koje djeluju na gredu i položaj njezinog pravca nosioca (slika 5.9.) u odnosu na točku B.



Slika 5.9. Uz primjer 5.2.

Rješenje:

Uzmemo li da su sile koje djeluju prema dolje pozitivnog smjera ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$ i $\vec{F}_5$), a sile koje djeluju prema gore ($\vec{F}_3$ i $\vec{F}_4$) negativnog smjera, slijedi:

$$F_R = 40\text{ N} + 60\text{ N} + 80\text{ N} - 50\text{ N} - 60\text{ N} = 70\text{ N}$$

Rezultanta je pozitivnog predznaka, pa ima smjer prema dolje.

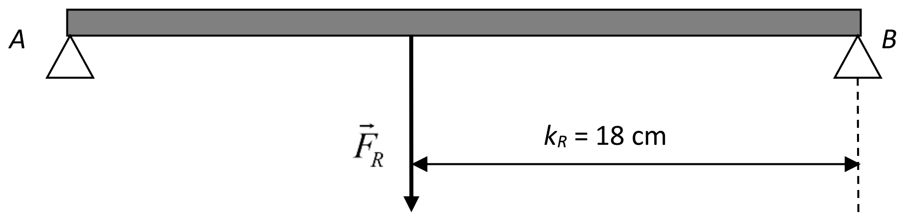
Udaljenost pravca nosioca rezultante od točke B računamo po formuli:

$$k_R = \frac{\sum_i^n F_i k_i}{F_R}$$

držeći se dogovora o predznacima momenta sila:

$$k_R = \frac{40N \cdot 33cm + 60N \cdot 23cm - 50N \cdot 18cm - 60N \cdot 9cm}{70N}$$

$$k_R = 18\text{ cm}$$



Slika 5.10. Uz rješenje primjera 5.2.

5.5. TEŽIŠTE

Na svaku česticu tijela djeluje sila teža. Zbroj tih sila predstavlja rezultantu, odnosno težinu tijela. Hvatište sile teže nalazi se u težištu tijela, tj. u točki:

$$\vec{r}_T = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \vec{r}_{CM}$$

Položaj težišta tijela i položaj centra mase (središta mase) nalazi se u istoj točki.
Pri određivanju težišta tijela, tijelo treba podijeliti na što manje dijelove ΔV, tako da ΔV teži prema nuli i, umjesto zbrajanja, prijeći na integriranje. Tako dobijemo izraze za koordinate težišta krutih tijela:

$$x_T = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} = \frac{\int x dV}{V} \qquad y_T = \frac{\int y dV}{V} \qquad z_T = \frac{\int z dV}{V}$$

gdje je ρ gustoća tijela (pretpostavka da je stalna), V obujam tijela.
Položaj težišta sustava možemo odrediti pomoću već poznate formule:

$$k_R = \frac{\sum_i^n F_i k_i}{F_R}$$

Ili, ako želimo još pojednostaviti, možemo uzeti sustav od dviju kuglica, za što vrijedi:

$$k_R = \frac{F_1 k_1 + F_2 k_2}{F_R}, \text{ odnosno: } \quad x_T = \frac{m_1 g x_1 + m_2 g x_2}{(m_1 + m_2) g} \qquad x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Ako imamo sustav od više tijela (materijalnih točaka) na istom pravcu, općenito vrijedi:

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

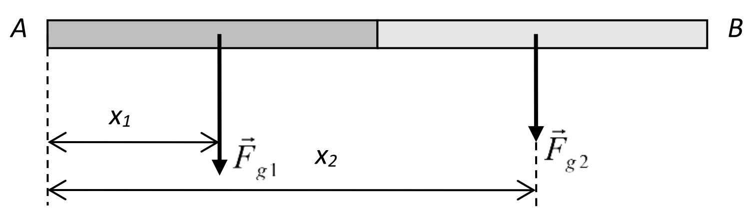
Ako materijalne točke nisu na istom pravcu, nego su raspoređene u prostoru, nalazimo još dvije prostorne koordinate za težište:

$$y_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad z_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

što predstavlja već gore napisane formule.

Težište tijela možemo odrediti pomoću pokusa tako da tijelo objesimo u jednoj točki i pustimo ga da se umiri. Zatim ga objesimo u drugoj točki i pustimo da se umiri. Težište će se nalaziti na vertikali kroz objesište (težišnici) i to na mjestu gdje se sijeku vertikale. Ovakav način određivanja težišta pogodan je za nepravilna i nehomogena tijela za koja ga ne možemo izračunati pomoću formula.

Primjer 5.3. Štap jednolikog presjeka, dugačak 2 m, napravljen je tako da mu je polovica od željeza, a druga polovica od aluminija. Gdje je težište? ($\rho_{Ž}$ = 7800 kg m^{-3}, ρ_{Al} = 2700 kg m^{-3})
Rješenje:



Slika 5.11. Uz primjer 5.3.

Težište tražimo u odnosu na točku A (slika 5.11):

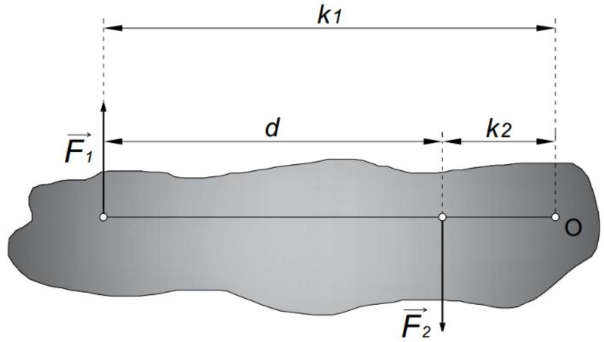
$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1 V_1 x_1 + \rho_2 V_2 x_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2} = \frac{\rho_1 V_1 \frac{l}{4} + \rho_2 V_2 \frac{3l}{4}}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2} = \frac{\rho_1 \frac{l}{4} + \rho_2 \frac{3l}{4}}{\rho_1 + \rho_2}$$

x_T = 0,757 m = 75,7 cm

Dakle, težište se nalazi na udaljenosti 75,7 cm od točke *A*.

5.6. PAR SILA

Par sila predstavljaju dvije antiparalelne sile (sile koje djeluju u suprotnim smjerovima) jednakih iznosa (slika 5. 12.). Njihova rezultanta jednaka je nuli:



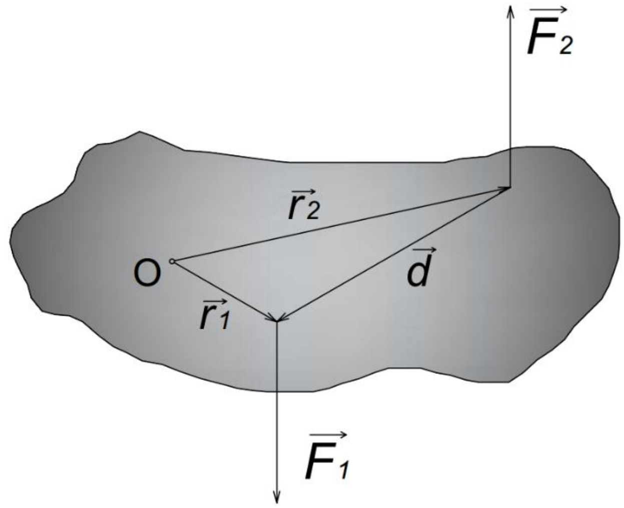
Slika 5.12. Par sila

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Međutim, njihov rezultantni moment različit je od nule. Nađimo ga za slučaj kada su smjerovi sila okomiti na spojnicu njihovih hvatišta:

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0$$
$$M_R = -F_1 k_1 + F_2 k_2 = -(k_1 - k_2)F = -dF$$
$$M = dF$$

gdje je *d* udaljenost između pravaca nosilaca sila.
Možemo zaključiti da je moment para sila jednak umnošku jedne od sila i udaljenosti između pravaca djelovanja. On ne ovisi o izboru točke s obzirom na koju računamo momente sila.
Moment para sila prema slici 5.12. negativan je jer zakreće tijelo u smjeru kazaljki sata. Moment koji zakreće tijelo u suprotnom smjeru od smjera kazaljki sata pozitivan je. Smjer vektora momenta para sila određuje se pravilom desne ruke, kao i smjer momenta sile.
Kako je $\vec{F}_R = 0$, a $\vec{M}_R \neq 0$, par sila ne uzrokuje translaciju, već samo rotaciju tijela.



Slika 5.13. Par sila

Za slučaj kada smjerovi sila nisu okomiti na spojnicu njihovih hvatišta, a prema slici 5.13., rezultantni moment je:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times F_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{d} \times \vec{F}_1 = F_1 d \sin\varphi$$

gdje je $\vec{d}$ vektor od hvatišta sile $\vec{F}_2$ do hvatišta sile $\vec{F}_1$.

5.7. UVJETI RAVNOTEŽE KRUTOG TIJELA

Pod djelovanjem više sila tijelo se giba translatorno, stalnom linearnom akceleracijom u smjeru rezultantne sile i rotira stalnom kutnom akceleracijom u smjeru rezultantnog momenta sila. Ako je rezultantna sila jednaka nuli, tada je i linearna akceleracija jednaka nuli; i kada je rezultantni moment sila jednak nuli, kutna akceleracija je jednaka nuli. Kada tijelo nema ni linearnu ni kutnu akceleraciju, kažemo da je u ravnoteži. Zaključujemo, da bi kruto tijelo bilo u ravnoteži, moraju biti ispunjena dva uvjeta (translacijska ravnoteža i rotacijska ravnoteža):

1. **Translacijska ravnoteža:** vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo u ravnoteži mora biti jednak nuli:

$$\sum_{i}^{n} \vec{F}_i = 0$$

2. Rotacijska ravnoteža: vektorski zbroj svih vanjskih momenata (s obzirom na odabranu točku) koje djeluju na kruto tijelo u ravnoteži mora biti jednak nuli:

$$\sum_{i}^{n} \vec{M}_i = 0$$

Napomenimo: kruto tijelo u ravnoteži je samo onda ako su istodobno ispunjena oba uvjeta. U tom slučaju kruto tijelo miruje ili se giba jednoliko po pravcu ili jednoliko rotira ili jedno i drugo.

Za slučaj kada sile koje djeluju na tijelo leže u jednoj ravnini (komplanarne sile), navedeni uvjeti prelaze u tri skalarne jednadžbe:

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0 \qquad \sum M_{iz} = 0$$

5.7.1. Primjeri ravnoteže

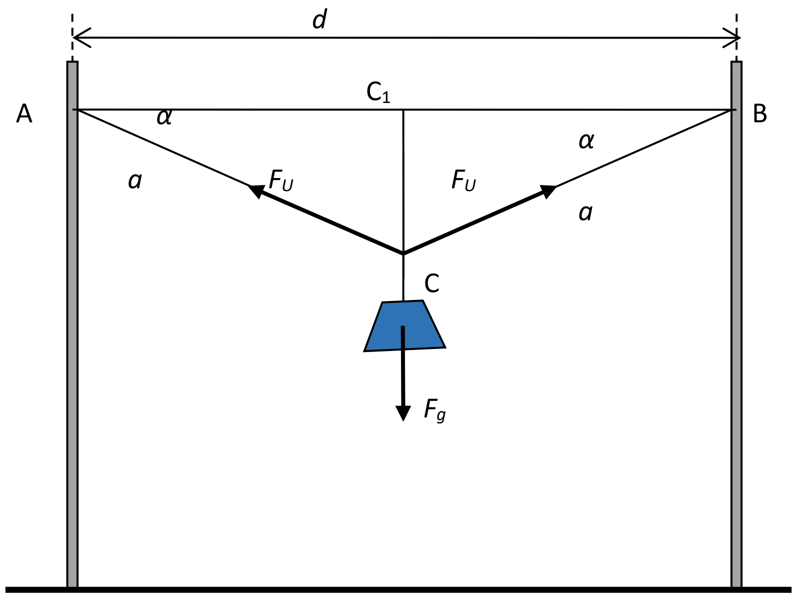
Uvjeti ravnoteže mogu se primijeniti na: ljestvama, poluzi, kosini, koloturima itd.

Primjer 5.4. Viseća postelja razapeta je između dva stabla koja su međusobno udaljena za d = 4 m. U postelji se nalazi čovjek mase 70 kg. Pretpostavimo da je masa čovjeka koncentrirana na sredini mreže (slika 5.14.).

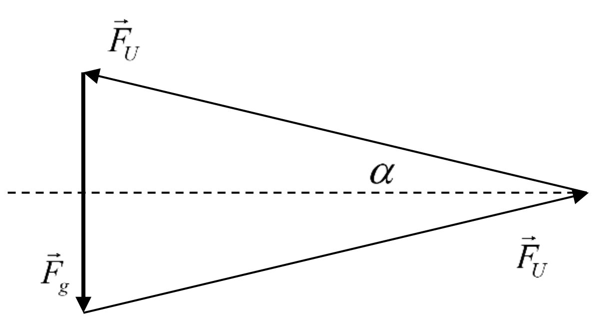
a) Odrediti napetost užadi kojima je mreža pričvršćena za stablo, ako je a = 2,5 m.

b) Kako napetost (kut α) postelje utječe na napetost (silu) u užetu?

Rješenje:



Slika 5.14. Uz primjer 5.4.



Slika 5.15. Uz rješenje primjera 5.4.

Vektorski zbroj napetosti sila u užadi $\vec{F}_U$ i težine tereta $\vec{F}_g$ mora biti jednak nuli:

$$\vec{F}_U + \vec{F}_U + \vec{F}_g = 0 \longrightarrow \vec{F}_U + \vec{F}_U = \vec{F}_g$$

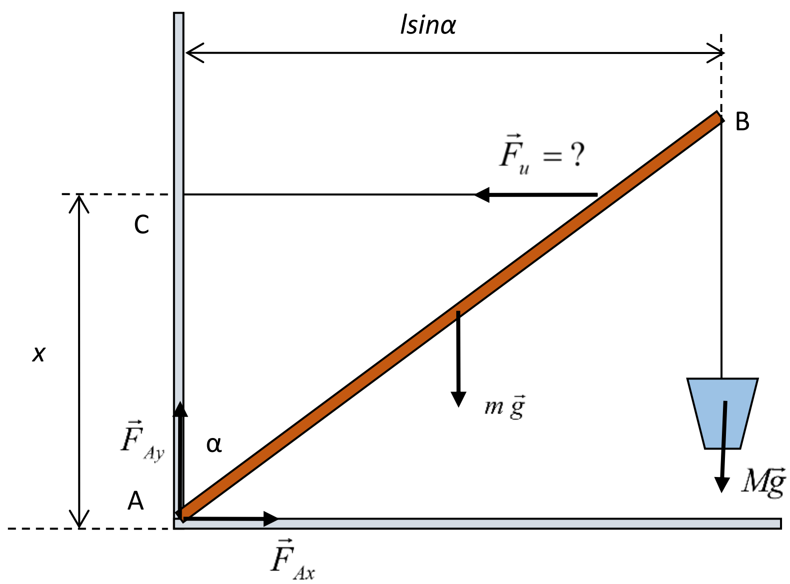
Iz slike 4.15.: $\sin\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}\vec{F}_g}{\vec{F}_U}$ $\qquad F_U = \dfrac{F_g}{2\sin\alpha} = 583\,\text{N}$

Iz ΔBC_1C: $\cos\alpha = \dfrac{\frac{d}{2}}{a} = \dfrac{d}{2a} = 0{,}8$ $\qquad \alpha = 36.87°$

Iz izraza $F_U = \dfrac{F_g}{2\sin\alpha}$ vidimo da smanjivanjem kuta sila u užetu $\vec{F}_U$ sve više raste. Teorijski za $\alpha \approx 0,\ F_U \rightarrow \propto$.

Primjer 5.5. Jednostavna dizalica sastoji se od jednostavnog štapa AB mase *m* i duljine *l*. Štap je u A zglobno vezan za zid, dok je u B obješen uteg mase M. Štap je u C užetom vezan za zid, tako da je AC = x. Naći silu u užetu i analizirati je u ovisnosti o veličini kuta *α* i udaljenosti AC = x (slika 5.16.).

Rješenje:



Slika 5.16. Uz rješenje primjera 5.5.

Budući da je sustav u ravnoteži, vrijedi:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M = 0$$

Za rješavanje ovog zadatka rabit ćemo drugi uvjet ravnoteže s obzirom na točku A:

$$\sum M_A = 0$$

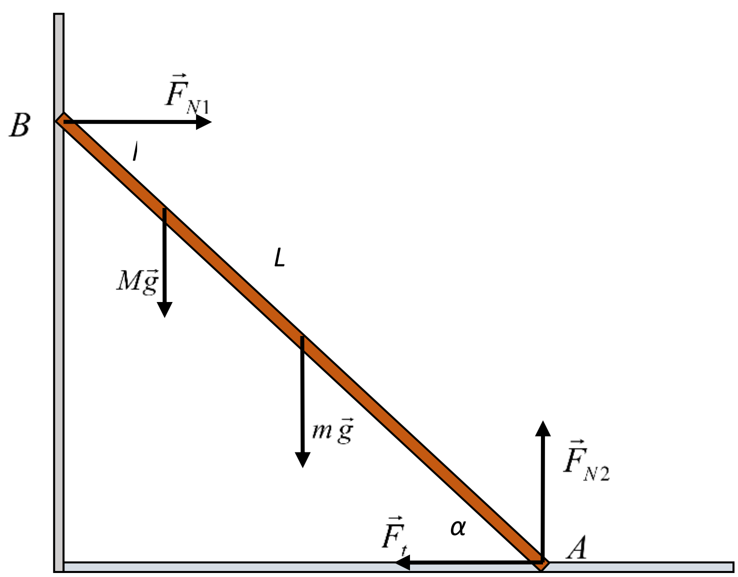
$$Mgl\sin\alpha + mg\frac{l}{2}\sin\alpha - F_u x = 0$$

$$F_u = \frac{gl}{x}\left(M + \frac{m}{2}\right) sin\alpha$$

Iz ovog izraza vidimo da smanjenjem x veličina sile u užetu naglo raste, dok smanjivanjem kuta α sila opada.

Primjer 5.6. (LJESTVE). Ljestve dužine L = 10 m i mase m = 15 kg naslonjene su na gladak vertikalni zid (μ = 0) pod kutom α = 60° prema horizontali. Odrediti silu i faktor trenja između ljestava i tla, potrebne da bi se čovjek mase M = 60 kg mogao popeti na l = 3 m od gornjeg kraja ljestava (slika 5.17.).

Rješenje:



Slika 5.17. Uz primjer 5.6.

Iz uvjeta ravnoteže sila u ravnini:

$\sum F_x = 0$ $\qquad$ $\sum F_y = 0$ $\qquad$ $\sum M = 0$

Dobivamo:

$\sum F_x = 0$ $\qquad$ $F_{N1} - \mu F_{N2} = 0$ $\qquad$ $F_{N1} = F_t$

$$\sum F_y = 0 \qquad Mg + mg - F_{N2} = 0 \qquad F_t = \frac{\left[m\frac{L}{2} + M(L-l)\right]g\cos\alpha}{L\sin\alpha}$$

$$\sum M = 0 \qquad F_{N1}L\sin\alpha - Mg(L-l)\cos\alpha - mg\frac{L}{2}\cos\alpha = 0$$

Dobili smo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice (F_{N1}, F_{N2}, μ) čijim rješavanjem dobivamo:

$$F_t = \left[\frac{1}{2}m + M\left(1 - \frac{l}{L}\right)\right]gctg\alpha$$

$$F_t \geq 280 \text{ N}$$

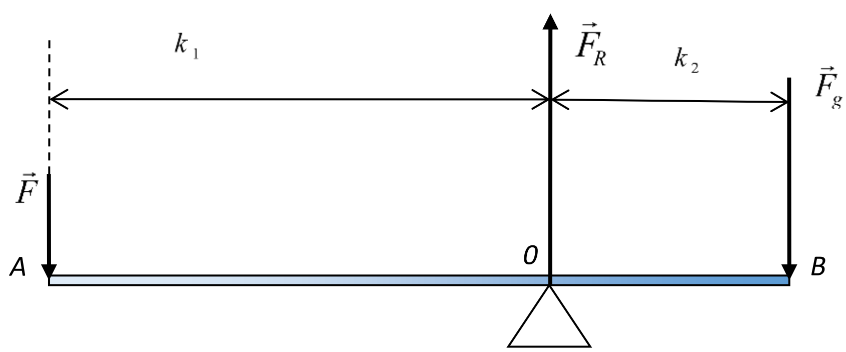
$$\mu = \frac{F_t}{F_{N2}} = \frac{F_t}{(M+m)g}$$

$$\mu \geq 0{,}38$$

Primjer 5.7. (POLUGA). Primjena poluge u zanatstvu i tehnici veoma je značajna. Poluga je svako kruto tijelo koje se okreće oko osovine kada na njega djeluju dvije antiparalelne sile. Omogućuje da se manjom silom savlada veća sila. Široka primjena poluge temelji se na njezinoj mehaničkoj prednosti.

Poluga duga 3 m, poduprta 1 m od jednog kraja, upotrijebljena je za dizanje tereta mase 300 kg (slika 5.18.). Kolika je potrebna sila na jednom njezinom kraju da bi uravnotežila težinu tereta na drugom kraju? Koliki je mehanički učinak poluge?

Rješenje:



Slika 5.18. Uz primjer 5.7.

1. Rješavamo s obzirom na točku O:

$$\sum_i^n M_i = 0 \qquad Fk_1 - F_g k_2 = 0 \qquad Fk_1 = F_g k_2 \qquad F = \frac{F_g k_2}{k_1} = \frac{mgk_2}{k_1} = 1500 \text{ N}$$

2. $\sum_{i}^{n} \vec{F}_i = 0$ $\qquad$ $\vec{F} + \vec{F}_R + \vec{F}_g = 0$ $\qquad$ $F - F_R + F_g = 0$

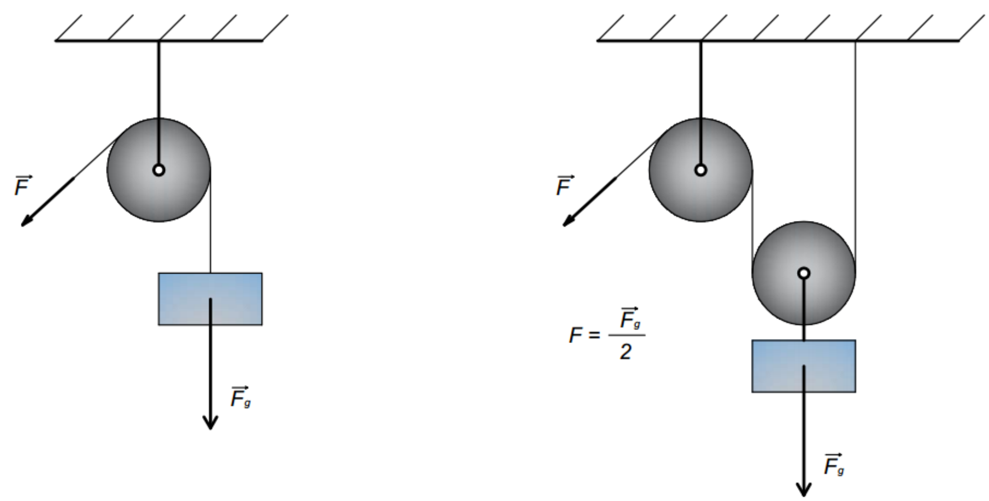
$F_R = F + F_g$ $\qquad$ $F_R = 4500$ N

Mehanički učinak ili mehanička prednost nekog stroja omjer je između savladane i uložene sile. U našem primjeru idealni mehanički učinak je:

$$\varepsilon = \frac{F_g}{F} = \frac{3000}{1500} = 2$$

O mehaničkom učinku (prednosti) stroja bit će govora kod mehaničkih alata.

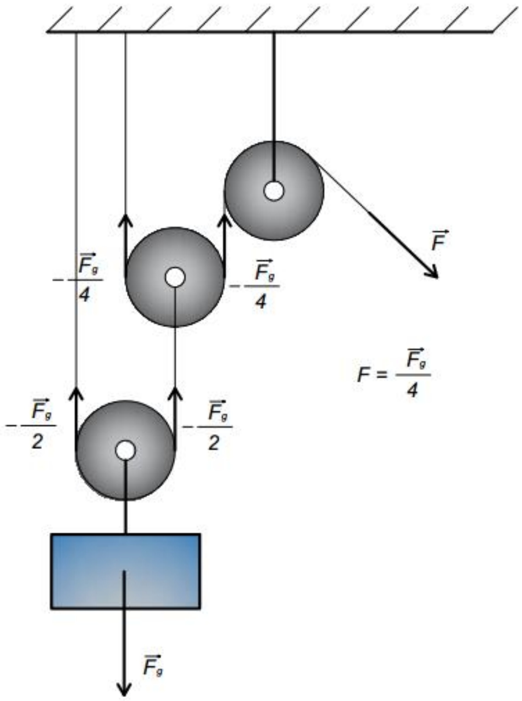
Primjer 5.8. (KOLOTUR). Kolotur je kotač koji na obodu ima žlijeb po kojem kliže uže. Može biti čvrst i pomičan (slika 5.19).



Slika 5.19. Nepomičan i pomičan kolotur

Mehanički učinak (prednost) pomičnog kolotura iznosi 2. Dodavanjem novih pomičnih kolotura mehanička se prednost povećava. Mehanička prednost kolotura jednaka je broju užadi *n* na kojoj vise pomični koloturi, a sila za dizanje tereta je:

$$F = \frac{F_g}{n}$$



Na slici 5.20. prikazan je koloturnik s dva pomična i jednim nepomičnim koloturom. Odredite silu koja uravnotežuje težinu tijela 120 kg u sustavu kolotura na slici 5.20., zanemarivši masu kolotura i trenje.

Rješenje:

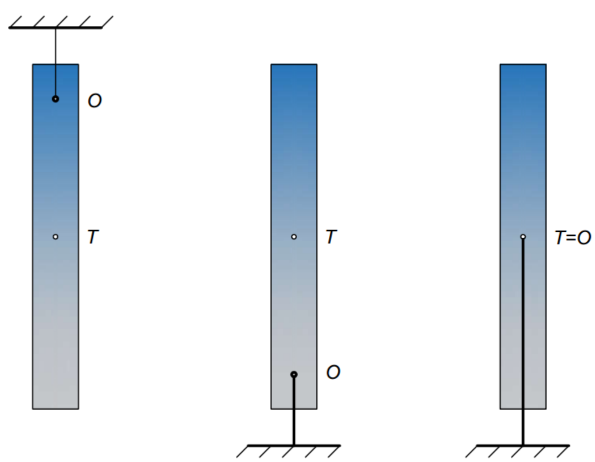
Prema slici 5.20. vrijedi:

$$F = \frac{F_g}{4} = \frac{mg}{4} = \frac{1200N}{4} = 300 \text{ N}$$

Slika 5.20. Koloturnik

5.8. VRSTE RAVNOTEŽE

Tri su vrste ravnoteže: stabilna, labilna i indiferentna.

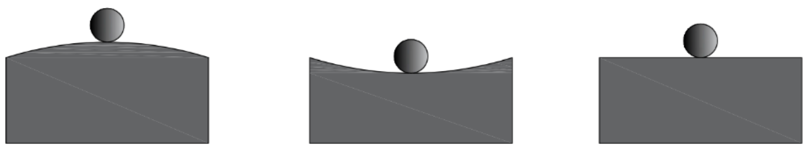


Slika 5.21. Vrste ravnoteže

Objesimo li ili podupremo tijelo u točki *O* tako da mu je težište u točki *T* na težišnici vertikalno ispod objesišta, tijelo se nalazi u **stabilnoj ravnoteži** (slika 5.21.). Podupremo li ili objesimo tijelo u točki *O* tako da mu je ta točka na težišnici vertikalno ispod težišta, tijelo se nalazi u **labilnoj ravnoteži**. Tijelo poduprto ili obješeno u težištu $T = O$ nalazi se u **indiferentnoj ravnoteži.**

Može se pokazati da je potencijalna energija tijela u stabilnoj ravnoteži minimalna, a u labilnoj maksimalna.

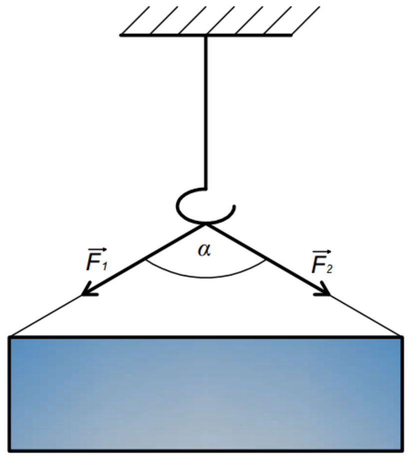
Prema slici 5.22. komentirajte vrste ravnoteže.



Slika 5.22. Ravnoteža kuglice

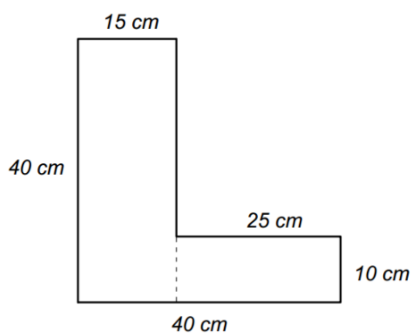
PITANJA I ZADACI

1. Kakva je razlika između statike i dinamike?
2. Što je kruto tijelo? Kako se kruto tijelo može gibati?
3. Kako se giba čestica, a kako kruto tijelo u ravnoteži?
4. Kada je čestica u ravnoteži? Objasnite ravnotežu na kosini.
5. Kako se definira moment sile? Kako mu se određuje smjer?
6. Kako se definira težište krutog tijela? Kakva je razlika između težišta i centra mase? Kako se pokusom može odrediti težište?
7. Kako na kruto tijelo djeluju dvije paralelne sile jednakog iznosa, ali suprotnog smjera?
8. Što je par sila? Koliki je moment para sila?
9. Kako se određuje hvatište rezultante kada više sila djeluje na tijelo?
10. Kako glase uvjeti ravnoteže krutog tijela? Primijenite te uvjete na jednom primjeru.
11. Kakva je razlika između stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže?
12. Kolika je potencijalna energija tijela kada je u ravnoteži?
13. Homogena greda mase 30 kg poduprta je na dva kraja. Kolikim silama djeluje greda na oslonce?
14. Najveći kut nagiba ceste na kojoj se automobil mase 2 t može zadržati kočnicama iznosi 20°. Kolika je komponenta težine koja djeluje na automobil niz cestu i kolikom silom automobil djeluje na cestu?
15. Zadane su dvije sile: F_1 iznosa 8 N i zatvara kut 30°s pozitivnim smjerom osi *x*, a F_2 ima iznos 6 N i zatvara kut 150°s pozitivnim smjerom osi *x*. Izračunajte zbroj tih dviju sila.
16. Na materijalnu točku djeluju u horizontalnoj ravnini tri sile, F_1 = 4 N prema sjeveru, F_2 = 3 N prema jugozapadu, F_3 = 4 N prema istoku. Izračunajte iznos i smjer rezultante s obzirom na istok.
17. Teret mase 1 t obješen je na čeličnom užetu kao na slici 5.23. Odredite napetost užeta F_1 i F_2 ako je kut α jednak a) 90° i b) 120°.



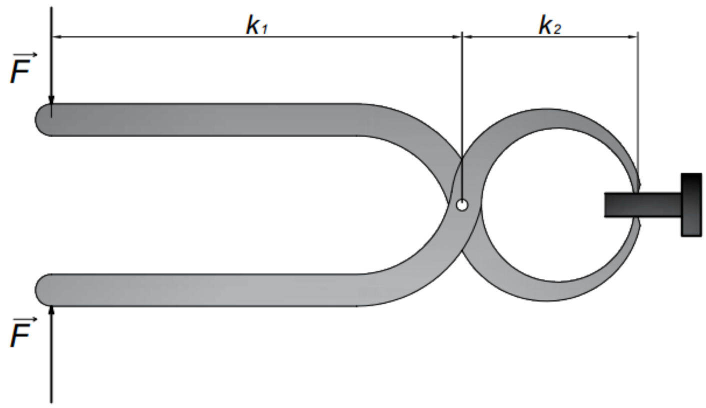
Slika 5.23. Uz zadatak 17.

18. Nađite koordinate težišta ploče prikazane na slici 5.24.



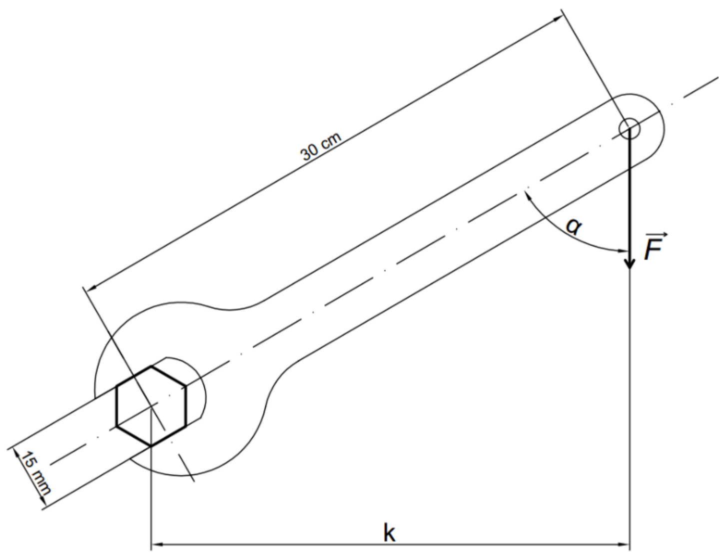
Slika 5.24. Uz zadatak 18.

19. Središta tri kugle čije su mase 2 kg, 5kg i 7 kg nalaze se u vrhovima pravokutnog trokuta. Prva se kugla nalazi u vrhu s pravim kutom, druga je od nje udaljena 3 m, a treća 4 m. Koliko je težište ovog sustava udaljeno od središta prve kugle?
20. Koliki je moment para sila pri zakretanju upravljača automobila ako promjer upravljača iznosi 40 cm, a sila svake ruke 7 N?
21. Hvatište dviju sila od 50 N i 20 N međusobno su udaljena 50 cm. Kolika je rezultanta tih sila i koliko je pravac, duž kojeg rezultanta djeluje, udaljen od hvatišta obiju sila ako su sile: a) istog smjera, b) suprotnih smjerova?
22. Dva radnika nose teret obješen na motku duljine 5 m. Gdje visi teret ako motka jednog od radnika pritišće dvostruko jače nego drugoga?
23. Greda mase 20 kg poduprta je na 1/3 svoje duljine. Kolikom je silom potrebno djelovati na rubu kraćeg dijela da bi greda bila u ravnoteži?
24. Na dužem dijelu kliješta djeluje sila od 100 N (slika 5.24.). Kolika sila pritom djeluje na čavao? Kliješta su dugačka 16,5 cm, a kraći kraj kraka kliješta dugačak je 3,5 cm.



Slika 5.24. Kliješta

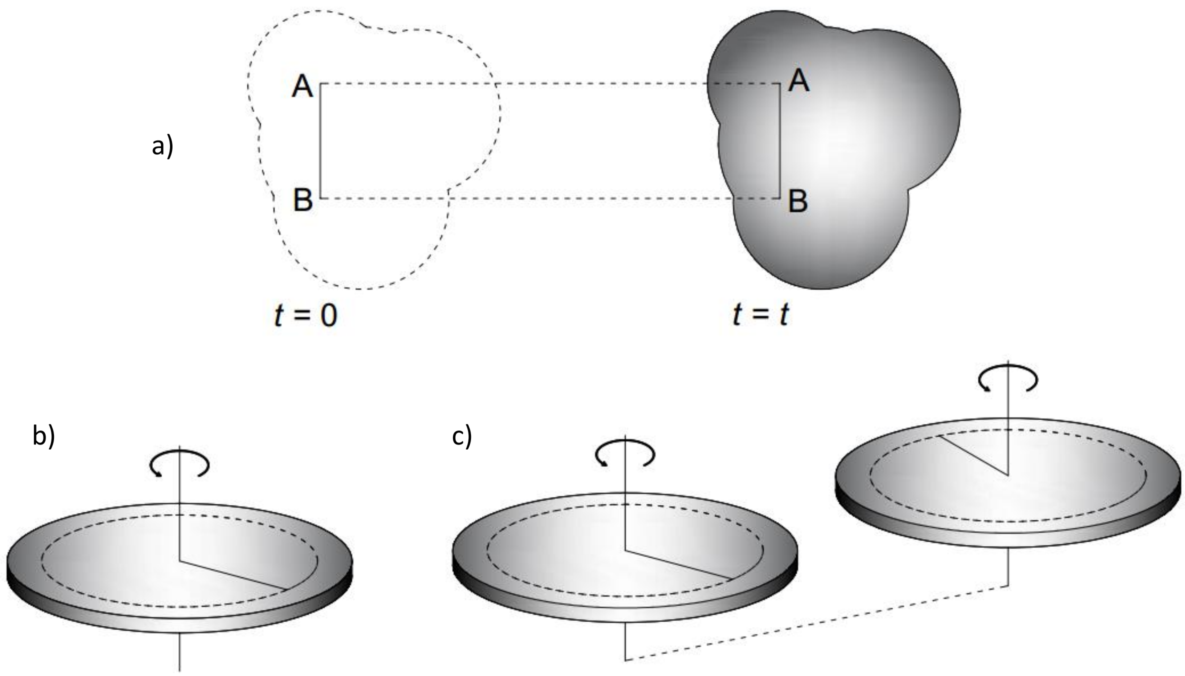
25. Da bismo svladali silu trenja koja se suprotstavlja odvijanju vijka, treba na ključ djelovati silom od 10 N pod kutom od 30° (prema slici 5.26.). Promjer vijka je 15 mm. Kolika je sila trenja?



Slika 5.26. Uz zadatak 25.

6. GIBANJE KRUTOG TIJELA

Gibanje krutog tijela susrećemo kod mnogih uređaja i strojeva i vrlo je važno u običnom životu. Kruto tijelo je tijelo koje zbog utjecaja sila ne mijenja svoj oblik. Razlikuju se dvije vrste gibanja krutog tijela, translacija i rotacija. Tijelo se giba translatorno ako linija koja povezuje bilo koje dvije njegove čestice zadržava svoj smjer u prostoru, tako da za vrijeme gibanja ostaje paralelna svom početnom položaju (slika 6.1. a). Za opisivanje translacije dovoljno je poznavati gibanje jedne točke tijela (npr. središta mase) jer se ostale točke gibaju na isti način. Translatorno gibanje krutog tijela svodi se na gibanje jedne točke.



Slika 6.1. a) translacija, b) rotacija, c) translacija i rotacija

Kada tijelo rotira oko neke osi, sve se njegove čestice gibaju jednakom kutnom brzinom po kružnicama čija središta leže na osi rotacije (slika 6.1. b).
Najopćenitije gibanje krutog tijela je translacija i rotacija (slika 6.1. c). Takvo gibanje izvodi kotač automobila za vrijeme vožnje.

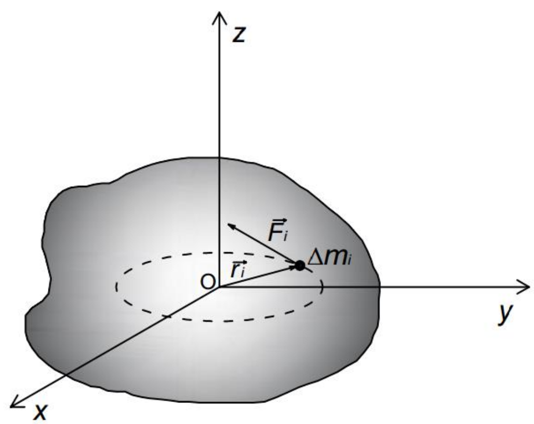
Primjer 6.1. Automobil se giba brzinom 72 km h^{-1}. Kolika je kutna brzina kotača ako mu je radijus 30 cm?

Rješenje:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20ms^{-1}}{0{,}3m} = 66{,}7s^{-1}$$

6.1. ROTACIJA KRUTOG TIJELA OKO NEPOMIČNE OSI

Pri rotaciji krutog tijela oko nepomične osi, sve se točke tijela gibaju po kružnicama čija središta leže na osi rotacije za koju pretpostavljamo da se poklapa s osi *z* koordinatnog sustava (slika 6.2.). Pritom sve točke krutog tijela imaju jednake kutne brzine i kutne akceleracije.



Slika 6.2. Uz izvod jednadžbe rotacije

Uočimo na tijelu jednu česticu mase Δm_i na udaljenosti r_i od osi rotacije, koja ima tangencijalnu akceleraciju a_{ti} koja je uzrok komponente tangencijalne sile F_i, odnosno njezina momenta:

$$M_i = r_i F_{ti} = r_i \Delta m_i a_{ti}$$

Ukupni moment na kruto tijelo bit će jednak zbroju momenata na svaku česticu od koje je tijelo građeno:

$$M = \sum_i M_i = \sum_i r_i F_{ti} = \sum_i r_i \Delta m_i a_{ti}$$

Svaka točka krutog tijela ima jednaku kutnu akceleraciju $\alpha = \frac{a_{ti}}{r_i}$, pa je uvedimo u gornji izraz:

$$M=\sum_i r_i\Delta m_i a_{ti}=\sum_i \frac{r_i^2\Delta m_i a_{ti}}{r_i}=\sum_i\left(\Delta m_i r_i^2\right)\alpha=\alpha\sum_i\left(\Delta m_i r_i^2\right)$$

Izraz $\sum_i(\Delta m_i r_i^2)$ je **moment tromosti tijela** s obzirom na os rotacije:

$$I_z=\sum_i\left(\Delta m_i r_i^2\right)$$

gdje je Δm_i masa i-te čestice, a r_i njezina udaljenost od osi rotacije z. Jedinica za moment tromosti je kg m^2. Moment tromosti analogan je masi tijela pri linearnom gibanju. Napišimo **jednadžbu rotacije krutog tijela oko nepomične osi**:

$$M_z=I_z\alpha$$

gdje je M_z rezultantni moment svih vanjskih sila s obzirom na os rotacije z, I_z moment tromosti s obzirom na tu istu os, a α kutna akceleracija tijela.

Ova jednadžba rotacijski je ekvivalent drugog Newtonovog zakona $F = ma$ za translacijsko gibanje, uz to da sili odgovara moment sile, masi moment tromosti, a linearna akceleracija kutnoj.

Za pomičnu os vrijedi drukčija jednadžba.

Ako je rezultantni moment $\vec{M}=0$, tada je $\vec{\alpha}=0$, tijelo će mirovati ili se jednoliko vrtjeti.

Ako je M_z = konst., tijelo će se vrtjeti oko nepomične osi konstantnom kutnom akceleracijom:

$$\alpha=konst. \qquad \omega=\alpha t \qquad \varphi=\frac{1}{2}\alpha t^2$$

6.2. MOMENT TROMOSTI

Moment tromosti je mjera za tromost tijela pri rotaciji. Dakle, on utječe na rotaciju slično kao što masa utječe na translaciju materijalne točke. Ako tijelo ima veći moment tromosti, teže ga je zarotirati.

Moment tromosti tijela koje rotira oko neke osi z jednak je sumi momenata čestica od kojih je tijelo sastavljeno:

$$I=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2+\ldots=\sum_i \Delta m_i r_i^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i r_i^2=\int r^2 dm$$

Moment tromosti tijela koje rotira oko neke osi z ovisi o raspodjeli mase s obzirom na os rotacije i o položaju osi rotacije tijela. Promjenom osi rotacije mijenja se i moment tromosti.

Pri gibanju materijalne točke mase m po kružnici polumjera r moment tromosti dan je izrazom:

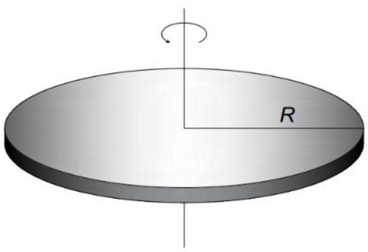
$$I = mr^2$$

Moment tromosti prstena mase m i polumjera R koji se vrti oko osi koja prolazi njegovim središtem okomito na ravninu prstena, i udaljenost svih dijelova prstena od osi rotacije, jednaka je polumjeru prstena R:

$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

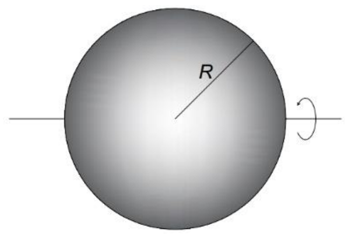
Možemo izračunati momente tromosti još nekih jednostavnijih tijela na sličan način. Navest ćemo njihove momente tromosti bez izvoda.

Kružna ploča



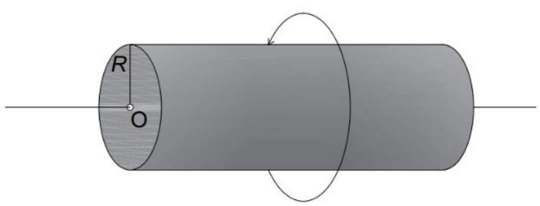
$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Kugla



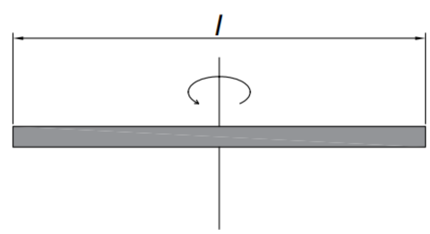
$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Puni valjak



$$I = \frac{mR^2}{2}$$

Štap

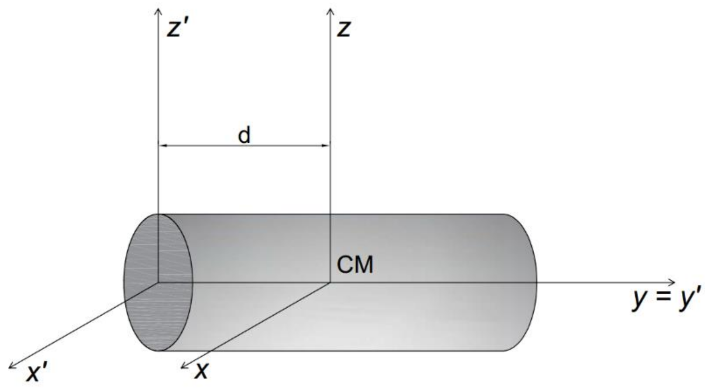


$$I = \frac{1}{12} ml^2$$

Slika 6.3. Moment tromosti nekih tijela

Moment tromosti najmanji je kada je os vrtnje položena kroz centar mase, kao na gornjim slikama. Obilježimo moment tromosti s obzirom na tu os s I_{cm}. Ako se os pomakne paralelno tom položaju za d (slika 6.4.), moment tromosti s obzirom na novi položaj osi možemo naći pomoću Steinerova poučka o paralelnim osima koji glasi:

$$I = I_{cm} + md^2$$



Slika 6.4. Uz Steinerov poučak

Primjer 6.2. Moment tromosti štapa duljine *l* i mase *m* s obzirom na os *z* okomitu na štap, koja prolazi kroz centar mase štapa, jest $I_{cm} = \frac{ml^2}{12}$. Koliki je moment tromosti *I* s obzirom na os *z´* koja prolazi jednim njegovim krajem?

Primjenom Steinerova poučka slijedi:

$$I = I_{cm} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

Primjer 6.3. Na kotač polumjera 50 cm, koji se može okretati oko nepomične središnje osi, djeluje tangencijalna sila od 2 N. Koliki je moment tromosti kotača ako on za 4 s nakon pokretanja napravi dva okretaja?

Rješenje:

r = 50 cm

F = 2 N

t = 4 s

N = 2

I = ?

$$\varphi = 2\pi N$$

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$2\pi N = \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\alpha = \frac{4\pi N}{t^2} = 1{,}57 \text{ rad s}^{-2}$$

$$M = I\alpha$$

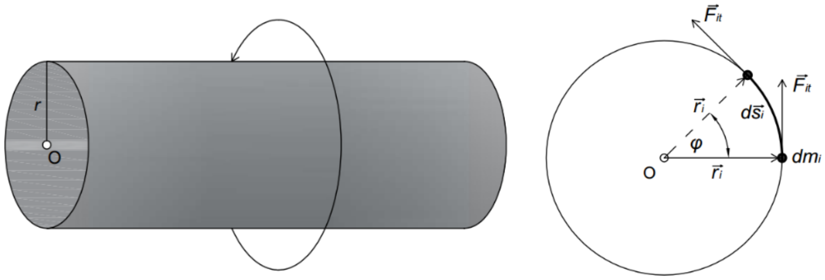
$$M = Fr$$

$$Fr = I\alpha$$

$$I = \frac{Fr}{\alpha} = 0{,}64 \text{ kg m}^2$$

6.3. RAD, KINETIČKA ENERGIJA I SNAGA PRI ROTACIJI

Rad



Slika 6.5. Uz izvod izraza za rad pri vrtnji

Promotrimo valjak polumjera *r* koji rotira stalnom kutnom brzinom ω oko nepomične osi O okomito na bazu valjka (slika 6.5.). Na djelić valjka (materijalnu točku) mase dm_i djeluje tangencijalna sila F_{it} stalnog iznosa u smjeru pomaka $d\vec{s}_i$ koja obavlja rad:

$$dW_i = F_{it} ds_i = F_{it} r_i d\varphi = M_i d\varphi$$

gdje je $ds_i = r_i d\varphi$ kružni luk, koji djelić valjka opiše, $d\varphi$ kut za koji se tijelo zavrtjelo, $\frac{d\varphi}{dt}$ kutna brzina vrtnje, $F_{it} r_i = M_i$ moment tangencijalne sile.

Rad koji se obavlja pri rotaciji krutog tijela jednak je zbroju radova obavljenih po pojedinim djelićima tijela:

$$dW = \sum dW_i = M d\varphi$$

Dakle, pri rotaciji za kut φ rad je:

$$W = \int_0^{\varphi} M d\varphi = M\varphi$$

Kinetička energija. Kinetičku energiju tijela koje rotira oko nepomične osi možemo odrediti tako da pretpostavimo da se taj rad pretvara u rotacijsku kinetičku energiju:

$$dE_k = dW = M d\varphi = I\alpha\omega dt = I\frac{d\omega}{dt}\omega dt = I\omega d\omega$$

$$E_{k\,r} = \int_0^{\omega} I\omega d\omega = \frac{I\omega^2}{2}$$

Tijelo može istodobno izvoditi i translaciju i rotaciju. Tada ima i translacijsku i rotacijsku energiju. Ukupna kinetička energija tijela jednaka je zbroju kinetičke energije translacije centra mase tijela i kinetičke energije rotacije tijela oko osi kroz centar mase:

$$E_k = E_{kt} + E_{kr} = \frac{mv_{cm}^2}{2} + \frac{I_{cm}\omega^2}{2}$$

pri čemu je v_{cm} brzina translacije centra mase, a I_{cm} i ω su moment tromosti i kutna brzina s obzirom na os kroz centar mase.

Snaga. Snaga je obavljeni rad u jedinici vremena:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

U slučaju rotacije tijela snaga je:

$$P = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega$$

Može se pokazati kako općenito vrijedi da je snaga skalarni produkt ukupnog momenta vanjskih sila i vektora kutne brzine $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$, analogno kao što je snaga pri translaciji skalarni produkt sile i brzine tijela $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

6.4. MOMENT KOLIČINE GIBANJA

Najprije ćemo definirati moment količine gibanja materijalne točke koja se giba po kružnici, a zatim ćemo analogijom translacije i rotacije odrediti moment količine gibanja krutog tijela koje rotira oko nepomične osi. Moment količine gibanja materijalne točke mase *m* koja se giba po kružnici (slika 5.8.) definira se kao vektorski produkt radijus vektora $\vec{r}$ i količine gibanja $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

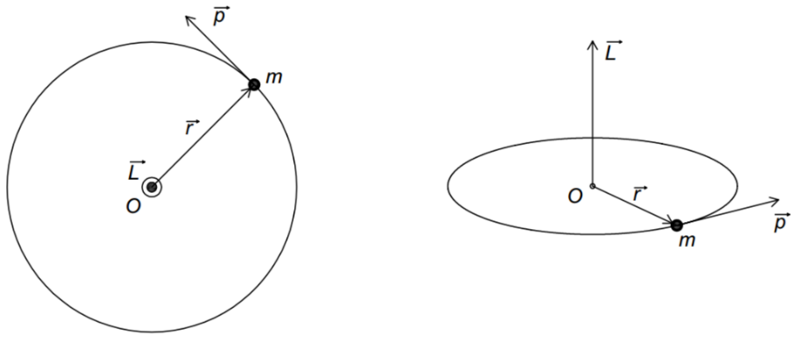
$$L = rp\sin\varphi = rmv\sin\varphi$$

gdje je $\vec{L}$ moment količine gibanja, φ kut između vektora $\vec{r}$ i $\vec{p}$. Moment količine gibanja $\vec{L}$ je vektor čiji smjer određujemo pomoću pravila desne ruke za smjer vektorskog produkta i to tako da nam, idemo li prstima desne ruke kraćim putem od vektora $\vec{r}$ do vektora $\vec{p}$, palac pokazuje smjer vektora $\vec{L}$. Jedinica momenta količine gibanja *L* jest kg m^2 s^{-1}. Kada se čestica giba po kružnici, vektori $\vec{r}$ i $\vec{v}$ međusobno su okomiti, pa zbog veza između obodne i kutne brzine $v = \omega r$ vrijedi:

$$L = mvr = mr^2\omega$$

U ovom je slučaju smjer vektora $\vec{L}$ stalan i jednak smjeru kutne brzine, pa vrijedi:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$$



Slika 6.6. Moment količine gibanja materijalne točke koja se giba po kružnici

Razmatranja o materijalnoj točki mogu se proširiti i na sustav čestica, odnosno na kruto tijelo koje rotira oko nepomične osi. Ova ćemo razmatranja, radi jednostavnosti, ipak svesti na analogiju translacije i rotacije.

Već smo uočili na više mjesta analogiju veličina i relacija za pravocrtno i kružno gibanje. Masi *m* analogan je moment tromosti *I*, brzini *v* kutna brzina ω itd. Ovakvom analogijom možemo doći do zakona rotacije krutog tijela.

Količini gibanja $\vec{p}$ čestice mase *m* i brzine *v* analogan je moment količine gibanja $\vec{L}$ tijela momenta tromosti *I* i kutne brzine $\vec{\omega}$. Kako je $\vec{p} = m\vec{v}$, tada je:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Dakle, moment količine gibanja umnožak je momenta tromosti tijela i njegove kutne brzine. To je vektor čiji je smjer jednak smjeru kutne brzine.

Drugi Newtonov zakon za gibanje čestice možemo izraziti pomoću količine gibanja:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Analogno tome možemo pisati jednadžbu rotacije:

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$$

Razradom ove jednadžbe dolazimo do:

$$\vec{M} = \frac{\Delta\left(I\vec{\omega}\right)}{\Delta t} = I\,\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = I\vec{\alpha}$$

Dobili smo jednadžbu koju smo već izveli za rotaciju krutog tijela oko nepomične osi.

Ako je $M = 0$, tada je $\Delta L = 0$, dakle nema promjene momenta količine gibanja, tj.

$$L = konst.$$

To je **zakon očuvanja momenta količine gibanja.** Možemo ga izreći ovako: kada je ukupni moment vanjskih sila koje djeluju na sustav jednak nuli, moment količine gibanja sustava ne mijenja se. Znači da vrijedi:

$$L_1 = L_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Navedimo neke praktične potvrde zakona očuvanja momenta količine gibanja. Primjerice, klizačica na ledu (kada izvodi piruetu) skupljanjem ruku uz tijelo smanjuje moment tromosti (dio mase svoga tijela približi osi rotacije), a povećava kutnu brzinu vrtnje uz stalni moment količine gibanja, što možemo zapisati:

$$I_1 > I_2 \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$

Znači da se smanjivanjem momenta tromosti povećava kutna brzina.

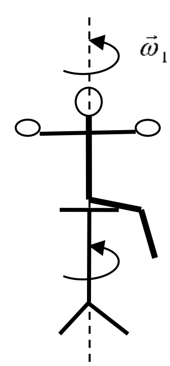
Širenjem ruku povećavamo moment tromosti i smanjujemo kutnu brzinu:

$$I_1 < I_2 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2$$

Sličnu tehniku primjenjuju akrobati, skakači u vodu, plesači itd. Pri padanju, mačka mahanjem repa mijenja moment tromosti i kutnu brzinu rotacije, tako da uvijek padne na noge. Skakač u vodu, skupljajući ruke i noge uz tijelo, također mijenja kutnu brzinu rotacije i moment tromosti.

Primjer 6.4. Prandtlov stolić na kojemu sjedi čovjek raširenih ruku i u svakoj ruci drži uteg 1 m daleko od osi rotacije, rotira frekvencijom 30 okr. min^{-1} (slika 6.7.). Masa svakog utega je 4 kg. Kolika će biti kutna brzina vrtnje ako čovjek skupi ruke tako da su utezi 20 cm udaljeni od osi rotacije? Moment tromosti stolice i čovjeka (bez utega) s obzirom na os rotacije iznosi 10 kg m^2.

Rješenje:
r_1 = 1m
f_1 = 30 okr. min^{-1}
$m_1 = m_2$ = 4 kg
r_2 = 20 cm
I = 10 kg m^2
ω_2 = ?



Slika 6.7. Prandtlov stolić

$$L_1 = L_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$(I + I_{U1})2\pi f_1 = (I + I_{U2})\omega_2$$

$$(I + 2mr_1^2)2\pi f_1 = (I + 2mr_2^2)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{(I + 2mr_1)2\pi f_1}{(I + 2mr_2)}$$

$$\omega_2 = 5{,}48 s^{-1}$$

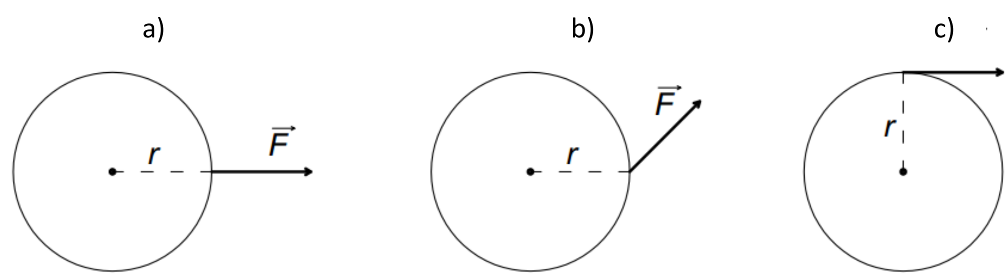
6.5. Analogija između zakona za translaciju i rotaciju

Translacija	**Rotacija**
pomak s brzina $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ akceleracija $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ masa m sila F količina gibanja $p = mv$ drugi Newtonov zakon $F = ma$; $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ rad $\Delta W = F\Delta s$ Kinetička energija $E_k = \frac{mv^2}{2}$ snaga $P = Fv$	kutni pomak φ kutna brzina $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$ kutna akceleracija $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ moment tromosti $I = \sum mr^2$ moment sile $M = Fr$ moment količine gibanja $L = I\omega$ drugi Newtonov zakon $M = I\alpha$; $M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ rad $\Delta W = M\Delta\varphi$ Kinetička energija $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$ snaga $P = M\omega$

Tablica 6.1. Analogija translacijskog i rotacijskog gibanja

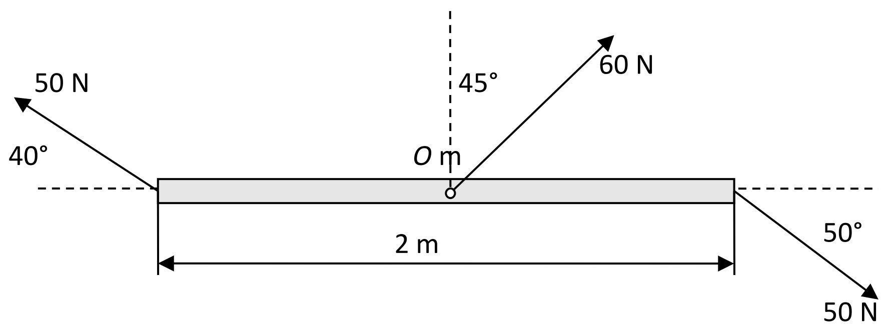
PITANJA I ZADACI

1. Što je kruto tijelo? Kako se može gibati kruto tijelo?
2. Izvedite jednadžbu rotacije krutog tijela oko nepomične osi.
3. Što je moment tromosti krutog tijela s obzirom na neku os?
4. Što kaže Steinerov poučak? Odredite moment tromosti tankog štapa mase m i duljine d s obzirom na os kroz centar mase i na paralelnu os koja prolazi krajem štapa.
5. Kako se definira moment količine gibanja materijalne točke koja se giba po kružnici, a kako krutog tijela što rotira oko nepomične osi?
6. Kakva je veza između momenta sile i momenta količine gibanja?
7. Što kaže zakon očuvanja momenta količine gibanja? Objasniti Prandtlov stolić.
8. Koliki je rad momenta sile pri rotaciji krutog tijela?
9. Kako se izračunava kinetička energija krutog tijela koje rotira oko nepomične osi?
10. O čemu ovisi snaga pri rotaciji?
11. Sila od 5 N djeluje na obod diska polumjera 1 m kako prikazuje slika 6.8. Koliki je moment sile s obzirom na os diska u svakom od slučajeva?



Slika 6.8. Uz zadatak 11.

12. Homogeni štap prikazan na slici 6.9. može se okretati oko središnje osi O. Koliki je ukupni moment sila s obzirom na os vrtnje? U kojem će se smjeru štap zavrtjeti ako je prije djelovanja sila bio u mirovanju?



Slika 6.9. Uz zadatak 12.

13. Koliki je moment sile kojim moramo djelovati na tijelo momenta inercije 2,5 kg m^2 ako ga zavrtimo iz mirovanja do frekvencije 30 okr. min^{-1} u vremenu od 20 s?

14. Puni valjak mase m i polumjera baze R vrti se oko uzdužne osi stalnom kutnom akceleracijom α. Kolikom bi kutnom akceleracijom α_k oko središnje osi rotirala puna kugla jednake mase i polumjera pri djelovanju jednakog momenta sile?

15. Na kružnu ploču polumjera 25 cm, koja može rotirati oko središnje osi okomite na ravninu ploče, djeluje 20 s stalna tangencijalna sila od 20 N. Za vrijeme djelovanja sile, kutna brzina ploče naraste od nule do $3\pi s^{-1}$. Izračunajte: zakretni moment, kutnu akceleraciju, moment tromosti, masu ploče i broj okretaja ploče u vremenu od 20 s.

16. Na svrdlo koje se vrti djeluje moment sile od 70 N m. Izračunajte rad koji je potreban da bi se svrdlo okrenulo 10 puta.

17. Kolika je rotacijska kinetička energija Zemlje pri vrtnji oko vlastite osi? Polumjer Zemlje je 6370 km, gustoća Zemlje je 5600 kg m^{-3}.

18. Snaga motora putničkog automobila iznosi 50 kW pri brzini od 90 km h^{-1}. Koliki je moment sile na svakom od dva pogonska kotača ako njihov polumjer iznosi 40 cm?

19. Motor razvija snagu 1260 W pri frekvenciji 1200 okr. min^{-1}. Koliki je zakretni moment?

20. Puni željezni valjak i puna željezna kugla jednakog polumjera počinju se istodobno kotrljati niz kosinu. Što će se skotrljati prije na dno kosine?

21. Dvije kugle jednake mase i polumjera spuste se s vrha kosine. Prva klizi bez trenja, a druga se kotrlja. Koja ima veću kinetičku energiju pri dnu kosine?

22. Motor snage 750 W pokreće cirkularnu pilu preko remenskog prijenosa. Kolika je tangencijalna sila na obodu cirkulara? Promjer kolotura na motoru je 20 cm, na pili 8 cm, dok je promjer cirkulara 30 cm. Motor se vrti 1800 okr. min^{-1}.

23. Oko nepomičnog kolotura mase 1 kg omotana je nit na koju je obješen uteg mase 2 kg. Kolika će biti brzina utega koji, padajući iz mirovanja, prijeđe put od 2 m? Kolotur ima oblik kružne ploče.

24. Puni valjak počne se kotrljati bez klizanja s vrha kosine visoke 2 m koja zatvara kut 30° prema horizontali. Kolike su brzina i akceleracija centra mase valjka na dnu kosine? Kolika bi bila brzina kada bi valjak klizio bez trenja?

25. Koliki je moment količine gibanja zamašnjaka u obliku pune okrugle ploče mase 5 kg, promjera 30 cm, pri vrtnji frekvencijom od 3200 okr. min^{-1}?

26. Horizontalno položena platforma oblika diska, polumjera 2 m okrene se jednom u vremenu 3 s oko vertikalne osi koja prolazi središtem platforme. Na njezinu rubu je dječak mase 50 kg. Kolika će biti frekvencija vrtnje ako se dječak premjesti s ruba platforme na udaljenost 1 m od osi? Masa platforme je 150 kg.

27. Valjak mase 100 g i polumjera 20 cm vrti se oko vertikalne osi koja prolazi središtem njegovih osnovica i čini jedan okretaj u sekundi. Na ravnu plohu valjka, 15 cm od osi vrtnje, padne okomito komad gline mase 12 g i zalijepi se za plohu. Kolikom će se sada frekvencijom okretati valjak?

28. Koliki je moment količine gibanja Zemlje oko Sunca? (Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg, a njezina središnja udaljenost od Sunca je $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m). ($L = 2{,}7 \cdot 10^{40}$ kg m^2 s^{-1}).

7. GRAVITACIJA

7.1. Newtonov opći zakon gravitacije

Od najdavnijih vremena čovjek je iskazivao interes za zbivanja na nebeskom svodu, pa se tako razvila astronomija, jedna od najstarijih znanosti. Snažim razvojem fizike brzo je napredovala i astronomija, pogotovo početkom novog vijeka, otkrićem dalekozora (G. Galilei 1609.; Newton 1687.), čime se pokazalo da isti zakoni prirode koji vrijede na Zemlji, vrijede i u čitavom svemiru.

Nekoliko tisućljeća prije Krista bile su poznate ove činjenice o gibanju nebeskog svoda:

1. Nebeski svod okreće se od istoka prema zapadu.

2. Zvijezde se okreću brže nego Sunce, Sunce se okreće brže nego Mjesec.

3. Putanje planeta nepravilne su krivulje. Planeti lutaju nebeskim svodom.

Trebalo je protumačiti ta gibanja.

Sva razmišljanja i hipoteze o gibanju nebeskih tijela skupio je aleksandrijski astronom i geograf K. Ptolemej (2. stoljeće) u svom djelu „Almagest“. Sustav svijeta iznesen u ovom djelu zove se Ptolemejev geocentrični sustav čije su osnove:

1. Zemlja ima oblik kugle.

2. Sva se nebeska tijela gibaju po epiciklima, odnosno kružnicama čija središta kruže oko Zemlje.

3. Zemlja stoji nepomična u središtu nebeske kugle.

Prema ovom sustavu, sve do 16. stoljeća, smatralo se da je Zemlja središte svijeta i da je čovjek stvor zbog kojeg je ovaj svijet stvoren.

Iako je još u starom vijeku bilo mišljenja (Aristarh sa Sama, 3. stoljeće prije Krista) da Sunce miruje, a da se Zemlja i ostali planeti gibaju oko njega, tek je poljski astronom Nikola Kopernik iznio tvrdnju koju je dokazao činjenicama da je Sunce središte planetarnog sustava.

Tvrdnje Kopernikova heliocentričnog sustava su:

1. Zemlja se vrti oko osi od zapada prema istoku. Vrijeme jednog okretaja Zemlje je jedan dan (rotacija Zemlje).

2. Zemlja je jedan od planeta, pa se kao i ostali planeti, okreće oko Sunca (revolucija Zemlje). Vrijeme jednog ophoda Zemlje oko Sunca je jedna godina.

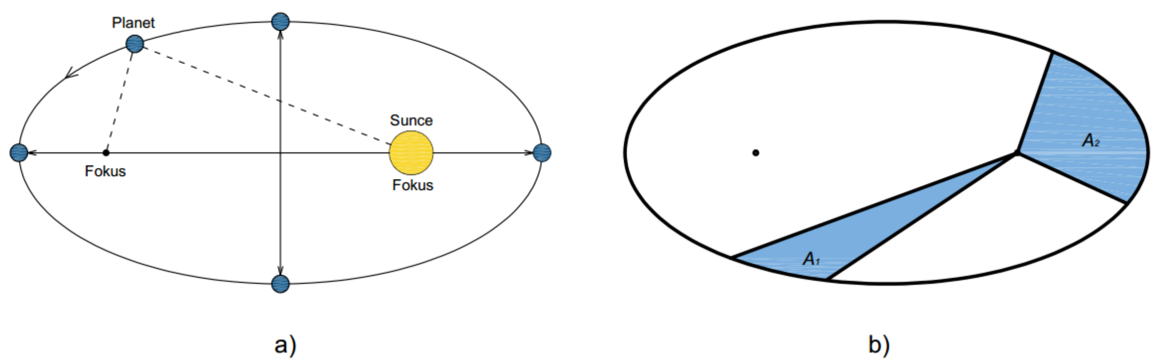
Bilo je astronoma koji su svojim točnim mjerenjima položaja planeta htjeli znanstveno dokazati da heliocentrični sustav ne odgovara stvarnosti (Tyho Brache). Baš ta točna mjerenja doprinijela su da iz njih njemački astronom J. Kepler nakon dugotrajnih računanja nađe tri zakona koji govore kako se planeti gibaju oko Sunca:

1. Svaki planet giba se po elipsi, a Sunce je u jednom žarištu te elipse (slika 7.1. a).

2. Radijus-vektor planeta (spojnica Sunce-planet) u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine $A_1 = A_2$ (slika 7.1. b).

3. Kvadrati ophodnih vremena planeta oko Sunca odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$



Slika 7.1. Uz Keplerove zakone

Keplerovi zakoni su zakoni kinematike (opisuju gibanje planeta bez obzira na uzroke). Tek je I. Newton u svom djelu „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" protumačio zakone gibanja planeta, zakon slobodnog pada, zakon gibanja dvojnih zvijezda, uzroke odstupanja planeta od njihovih putanja i uzroke plime i oseke. Sve to proizlazi iz općeg zakona gravitacije koji je on otkrio.

Newton je došao do općeg zakona gravitacije zaključivanjem i iskustvom tako što je smatrao da treba odrediti dva podatka o privlačnoj sili Sunca prema planetima, i to: kako ta sila ovisi o masama Sunca i planeta i kako ta sila ovisi o njihovoj međusobnoj udaljenosti.

Smatrao je da je sila teža Zemlje istog karaktera kao i privlačna sila Sunca, tj. kao što privlačna sila Sunca (gravitacija) uzrokuje kruženje planeta oko njega, tako i sila teža Zemlje uzrokuje kruženje Mjeseca oko Zemlje. Tada bi sila teža svim tijelima na istom mjestu Zemlje davala istu akceleraciju, pa iz temeljnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m}$$

slijedi da je sila kojom Zemlja djeluje na tijelo mase *m* proporcionalna masi tijela, da bi akceleracija ostala stalna. Kako su, prema Newtonu, gravitacija i sila teža Zemlje istog karaktera, to će i gravitacija biti proporcionalna masi tijela, a prema trećem Newtonovom zakonu i planeti moraju djelovati na Sunce silom istog iznosa, koja također mora biti proporcionalna masi tijela koje privlače, tj. masi Sunca.

Prema tome, privlačna sila Sunca (gravitacija) proporcionalna je masama dvaju nebeskih tijela:

$$F \sim m_1 m_2$$

Newton je trebao odrediti i ovisnost gravitacije o udaljenosti između Sunca i planeta. To je odredio tako da je za putanje planeta uzeo kružnice (jer se putanje planeta izvanredno malo razlikuju od kružnica).

Planeti imaju centripetalnu akceleraciju

$$a_{cp} = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

gdje je *r* udaljenost planeta od Sunca, *T* ophodno vrijeme planeta.

Kako je treći Keplerov zakon $T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3$, dobivamo

$$a_1 : a_2 = \frac{r_1}{r_1^3} = \frac{r_2}{r_2^3} = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}$$

Dakle, centripetalna akceleracija planeta obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti planeta od Sunca: $a \sim \frac{1}{r^2}$

pa je prema tome i gravitacija obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti planeta od Sunca (jer je *F* = *m a*, *a* ~ *F*): $F \sim \frac{1}{r^2}$

Tako je Newton došao do svoga općeg zakona gravitacije: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

Privlačna sila između bilo kojih dvaju sitnih tijela (gravitacijska sila, gravitacija) proporcionalna je masama tijela, a obrnuto proporcionalna kvadratu njihove međusobne udaljenosti (udaljenost između njihovih središta).

Konstanta proporcionalnosti *G* je opća gravitacijska konstanta. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$. (Zašto ta konstanta ima upravo takve jedinice?)

Iz Newtonovog zakona gravitacije može se izračunati po kakvim stazama i kako se gibaju planeti oko Sunca. Iz njega proizlaze Keplerovi zakoni. Može se primijeniti na sve mase u svemiru i prema njemu se mogu izračunati i putanje dvojnih zvijezda. Pomoću njega možemo izračunati mase nebeskih tijela.

Izračunajmo masu Zemlje.

Na tijelo koje se nalazi na površini Zemlje djeluje sila teža: $F = m\,g$.

Ta sila računata pomoću općeg zakona gravitacije je: $F = G\frac{Mm}{R^2}$.

R je polumjer Zemlje, M je masa Zemlje, m je masa tijela.

Izjednačavanjem izraza za silu kojom Zemlja privlači tijelo, proizlazi:

$$G\frac{Mm}{R^2} = mg \qquad\qquad M = \frac{gR^2}{G}$$

Uvrstimo li poznate vrijednosti za: g = 9,81 m s^{-2}, R = 6,37 $\cdot 10^6$ m i G = 6,67 $\cdot$ 10^{-11} $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$, dobijemo za masu Zemlje M = 5,98 $\cdot$ 10^{24} kg.

Newtonov opći zakon gravitacije omogućio je proučavanje gibanja svih nebeskih tijela. Smatra se jednim od najvećih i bitnih dostignuća znanosti.

Newton je znao da su plima i oseka posljedica gravitacijskog privlačenja Zemljinih morskih voda od Mjeseca i Sunca i centrifugalnih sila koje nastaju pri gibanju Zemlje i Mjeseca oko njegova zajedničkog težišta, odnosno pri gibanju zemlje oko Sunca.

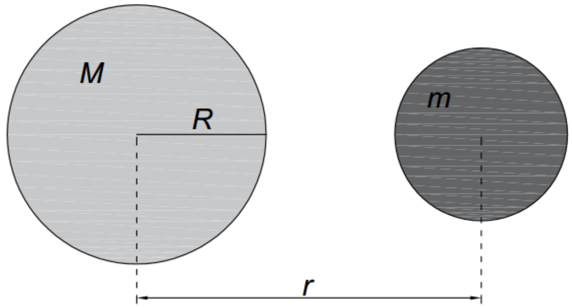
Umjetni sateliti podvrgnuti su također Newtonovom općem zakonu gravitacije i Keplerovim zakonima.

7.2. Rad gravitacijske sile i gravitacijska potencijalna energija

Gravitacijska potencijalna energija u blizini Zemljine površine na visini h iznad Zemlje je:

$$E_{gp} = mgh$$

Izraz vrijedi samo za visine koje su prilično manje od Zemljina polumjera, inače je potrebno uzeti mijenjanje gravitacijske sile s udaljenošću od Zemlje.



Slika 7.2. Zbog gravitacijskog privlačenja dvaju tijela postoji gravitacijska potencijalna energija

Pretpostavimo da smo tijelo mase *m* bez ubrzanja doveli s položaja *R* u položaj *r* u gravitacijskom polju Zemlje mase *M* . Rad obavljen pri premještanju tijela mase *m* je:

$$W = \int_R^r F dr = \int_R^r G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Taj rad ne ovisi o putu, nego samo o početnom i konačnom položaju. Jednak je promjeni gravitacijske potencijalne energije:

$$W = E_{gp}(r) - E_{gp}(R) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Ako je $r \to \infty$, sila $F \to 0$ pa je $E_{gp} = 0$. Uz taj dogovor možemo zaključiti:

Između bilo kojih dvaju tijela djeluje gravitacijska sila, zbog čega tijela, jedno u odnosu na drugoga, imaju gravitacijsku potencijalnu energiju koju određujemo pomoću izraza:

$$E_{gp} = -G\frac{Mm}{r}$$

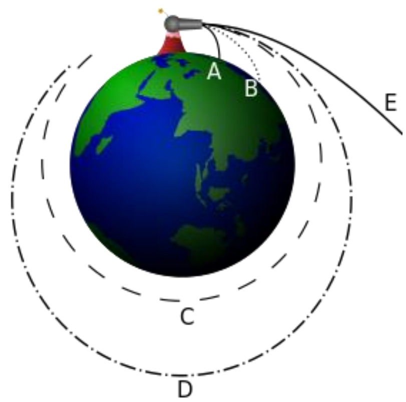
M, *m* su mase tijela, *r* je udaljenost između njihovih središta.

Primjer 7.1. Kolika je potencijalna energija tijela mase 1 kg na Zemljinoj površini?

$$E_{gp} = -G\frac{Mm}{R} = 6{,}27 \cdot 10^7 \text{ J}$$

što se dobilo uvrštavanjem $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m.

7.3. SATELITI I KOZMIČKE (SVEMIRSKE) BRZINE



Slika 7.3. Newtonova zamišljena topovska kugla (Izvor: Internet, pristupljeno 20.7.2017.)

Mjesec je prirodni Zemljin satelit. Neko tijelo može postati umjetni Zemljin satelit ako ga sa Zemlje izbacimo dovoljno velikom brzinom (slika 7.3.). Najmanja brzina kojom je neko tijelo potrebno izbaciti sa Zemlje da bi postalo njezin umjetni satelit zove se prva svemirska (kozmička) brzina. Satelit se oko Zemlje giba po kružnoj putanji. Da bi se gibao po kružnoj putanji, na njega mora djelovati centripetalna sila. Centripetalna sila je gravitacijska sila.

$$F_{cp} = F_g \qquad \frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \qquad v = \sqrt{G\frac{M}{R^2}}$$

Ovo je izraz za **prvu svemirsku brzinu** za bilo koje svemirsko tijelo iz kojeg dobivamo da za Zemlju iznosi 7900 m s^{-1}.

Za Zemlju možemo dobiti jednostavniji izraz ako umjesto gravitacijske sile uzmemo silu težu:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \qquad v = \sqrt{Rg}$$

Druga svemirska brzina. To je najmanja brzina kojom treba izbaciti tijelo da bi napustilo privlačnu silu Zemljine gravitacije. Ta se brzina zove još brzina oslobađanja. Izvodimo je pomoću zakona očuvanja mehaničke energije. U trenutku izbačaja, tijelo ima kinetičku i gravitacijsku potencijalnu energiju, tako da mu je ukupna energija jednaka njihovu zbroju:

$$E = E_k + E_{gp} = \frac{mv_0^2}{2} + (-G\frac{Mm}{R})$$

Pri udaljavanju tijela od Zemlje, kinetička i gravitacijska energija se mijenjaju, ali njihov zbroj mora biti stalan:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r}$$

m je masa izbačenog tijela, M je masa Zemlje, v_o je brzina kojom je tijelo izbačeno, R je radijus Zemlje, r je udaljenost od središta Zemlje, v je brzina na udaljenosti r.

Na udaljenosti $r \to \infty$ zbroj gravitacijske potencijalne i kinetičke energije jednak je nuli pa je:

$$\frac{mv_o^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0$$

Iz ovog izraza nalazimo formulu za **drugu svemirsku brzinu**:

$$v_o = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v \qquad v_o = 11{,}2 \text{ km s}^{-1}$$

Vidimo da je druga svemirska brzina za $\sqrt{2}$ veća od prve svemirske brzine $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$:

$$v_o = \sqrt{2}v \, .$$

Brzina oslobađanja nije jednaka za sve svemirske objekte. Ako brzina oslobađanja, koja je jednaka brzini svjetlosti, nije dovoljna za oslobađanje od gravitacijskog djelovanja, govorimo o crnoj rupi jer se u tom slučaju objekt ne može vidjeti.

Najmanja brzina koju mora imati tijelo da bi napustilo Sunčev sustav i otišlo u međuzvjezdani prostor zove se **treća svemirska brzina** (iznosi oko 16,6 km s^{-1}).

Četvrta svemirska brzina najmanja je brzina koju može imati tijelo da bi napustilo našu galaksiju (Mliječna staza ili Kumova slama), (iznosi oko 550 km s^{-1}).

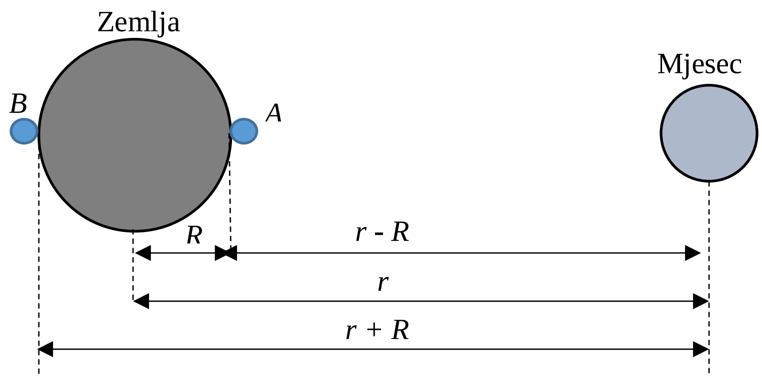
7.4. PLIME I OSEKE

Plima se pojavljuje na istome mjestu dva puta u tijeku nešto više od 24 sata i to periodično otprilike svakih 12 sati i 27 minuta. Istodobno se pojavljuje na suprotnim krajevima Zemlje.

Dva su uzroka plime i oseke na Zemlji:

1. Gravitacijsko djelovanje (gravitacijska sila) Mjeseca i Sunca na morske vode na Zemlji
2. Centrifugalna sila koja nastaje zbog gibanja Zemlje i Mjeseca oko njihova središta mase, odnosno pri gibanju Zemlje oko Sunca

Osvrnut ćemo se na objašnjenje pojave morskih mijena i izvesti izraz za plimnu silu koja uzrokuje morske mijene (stvaranje plime i oseke). Razmotrimo plimnu silu uzimajući u obzir samo djelovanje Mjeseca čiju masu označimo s m. Neka je M masa Zemlje, R radijus Zemlje, r je udaljenost između središta Zemlje do Mjeseca:



Slika 7.4. Uz objašnjenje plimne sile Mjeseca

Između Zemlje i Mjeseca djeluje gravitacijska sila:

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Zbog privlačenja Zemlja će slobodno padati prema Mjesecu ubrzanjem:

$$a = G\frac{m}{r^2}$$

Dakle, Zemlja je ubrzani sustav, pa će sva tijela na Zemlji dobiti ubrzanja – a. Tako će i tijela A i B imati ubrzanja – a, a budući da ih i Mjesec privlači, imat će ubrzanja:

$$a_A = G\frac{m}{(r-R)^2} \qquad\qquad a_B = G\frac{m}{(r+R)^2}$$

U sustavu Zemlje tijela će imati rezultantna ubrzanja:

$$a_{RA} = a_A - a = G\frac{m}{(r-R)^2} - G\frac{m}{r^2} = \frac{Gm(2rR - R^2)}{r^2(r-R)^2}$$

$r = 60\,R$, dakle je $R << r$, pa je približno $r - R \approx r$, $2rR - R^2 \approx 2rR$:

$$a_{RA} = a_A - a = \frac{2GmR}{r^3}$$

Na jednak način za tijelo B vrijedi:

$$a_{RB} = a_B - a = -\frac{2GmR}{r^3}$$

Dakle, na svako tijelo na Zemlji (A i B) djelovat će jednaka sila, ali suprotne orijentacije koja se zove **plimna sila** dana formulom:

$$F = \frac{2GmMR}{r^3}$$

Na jednak način možemo odrediti plimnu silu Sunca, pa usporediti te dvije plimne sile: ($m_M = 7\cdot10^{22}$ kg, $m_S = 2\cdot10^{30}$ kg, $r_{ZM} = 3{,}8\cdot10^8$ m; $r_{ZS} = 1{,}5\cdot10^{11}$ m), pri čemu dobijemo:

$$\frac{F_{Mjeseca}}{F_{Sunca}} = \frac{\frac{2Gm_M MR}{(r_{ZM})^3}}{\frac{2Gm_s MR}{(r_{ZS})^3}} = \frac{m_M}{m_S}\left(\frac{r_{ZS}}{r_{ZM}}\right)^3 = 2{,}15$$

Vidimo da Mjesec ima preko dva puta veći utjecaj od Sunca na plimu i oseku na Zemlji.

7.5. GRAVITACIJA U SVEMIRU

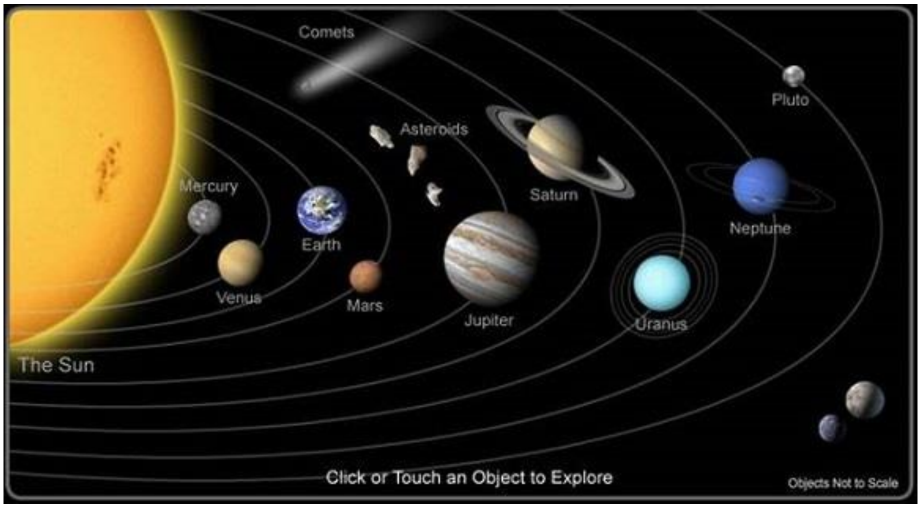
Gravitacijska sila koja se računa pomoću općeg zakona gravitacije dolazi do izražaja ako bar jedno od tijela ima veliku masu (npr. Zemlja i neko tijelo na njoj, Zemlja i Mjesec, itd.). Dakle, možemo zaključiti da između svemirskih tijela vlada gravitacijska sila koja je odgovorna za njihovo gibanje.

Sunčev sustav. Smatralo se sve do dvadesetih godina 20. stoljeća da je svemir prostor koji je ispunjen zvijezdama. Tada su otkrivene skupine zvijezda nazvane galaksijama, a u jednoj se nalazilo Sunce (naša galaksija) i nazvana je Mliječna staza. U njoj je otkriveno i osam planeta (slika 7.4.) koji kruže oko Sunca, mnoštvo asteroida i planetoida, mnoštvo kometa i sićušnih meteoroida.

Do početka 1990-ih bilo je poznato 9 planeta, svi u Sunčevu sustavu (*solarnom sustavu*). Danas se u Sunčevu sustavu broji 8 planeta, dok je Pluton svrstan u kategoriju planetoida, poput Ceresa, Pallaisa, Sedne i drugih. Izvor: Internet.

Planeti našeg Sunčeva sustava su (redom po udaljenosti od Sunca): Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn, Uran, Neptun.

Planeti imaju ukupno više od stotine svojih prirodnih satelita (mjeseca), koje svojom gravitacijskom silom prisiljavaju na približno kružno gibanje. Bez prirodnih satelita jedino su Merkur i Venera. Više od 99 % mase u Sunčevu sustavu pripada Suncu koje svojim gravitacijskim djelovanjem drži sustav na okupu.



Slika 7.5. Planeti Sunčeva sustava (izvor: internet)

Planet	**ekvatorski polumjer**	**spljoštenost**	**Masa**	**srednja gustoća**	**ubrzanje sile teže**	v_{osl}	**priklon osi rotacije***	**period vrtnje***
	km		kg	g/cm^3	Zem.=1	km/s	^{o}	dani
Sunce	695500	$9 \cdot 10^{-6}$	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	1,41	27,94	617,7	7,25	25,38
Merkur	2439,7	0	$3{,}30 \cdot 10^{23}$	5,43	0,38	4,2	0,01	58,65
Venera	6051,8	0	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	5,24	0,91	10,4	177,4	-243,02
Zemlja	6378,1	0,00335	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	5,515	1	11,2	23,5	0,99727
Mars	3396,2	0,00648	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	3,93	0,38	5,0	25,2	1,02595
Jupiter	71 492	0,06487	$1{,}899 \cdot 10^{27}$	1,33	2,53	59,5	3,1	0,41354
Saturn	60 268	0,09796	$5{,}68 \cdot 10^{26}$	0,69	1,07	35,5	26,7	0,44401
Uran	25 559	0,02293	$8{,}68 \cdot 10^{25}$	1,27	0,91	21,3	97,8	-0,71833
Neptun	24 764	0,01708	$1{,}02 \cdot 10^{26}$	1,64	1,14	23,5	28,3	0,67125

Tablica 7.1. Osnovni fizički elementi planeta i Sunca (Izvor: internet, pristupljeno 21.7.2017.)

**Ovi se elementi općenito polagano mijenjaju vremenom, pa se kod egzaktnog navođenja njihovih vrijednosti ističe vrijeme na koju se vrijednosti odnose.*

U našoj galaksiji, Mliječnoj stazi (Kumova slama), uz naše Sunce nalazi se najmanje 10^{11} zvijezda. One se drže na okupu zahvaljujući gravitacijskoj sili. Spiralnog je oblika i sa središnjim diskom gusto napučenim zvijezdama.
Galaksija je nastala gravitacijskim okupljanjem ogromne nakupine plina i prašine. Rotacijom je poprimila pločasti oblik.
Naše Sunce se nalazi gotovo na periferiji, udaljeno oko 26 000 godina svjetlosti od središta galaksije. Tangencijalna brzina gibanja Sunca oko središta galaksije je oko 220 km s^{-1}.

Slika 7.6. Naša galaksija Mliječna staza (izvor: internet)

Djelovanje gravitacijske sile nije ograničeno samo na unutrašnjost galaksije. Galaksije se uzajamno privlače i raspoređuju u prostoru zbog djelovanja gravitacijske sile i formiraju galaktička jata, u kojima može biti i do više tisuća galaksija. Lokalno galaktičko jato u kojem se nalazi naša galaksija sadrži svega tridesetak pretežno manjih galaksija. Nama najbliža galaksija vidljiva prostim okom, Andromeda, udaljena je oko 700 000 pc (2,5 milijuna svjetlosnih godina). Jedan parsek (pc) je jedinica za svemirske udaljenosti.

1 pc = $3{,}086 \cdot 10^{16}$ m = 3,26 svjetlosnih godina

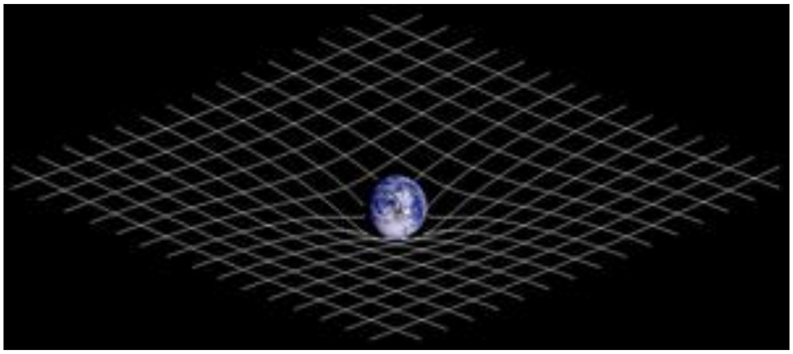
1 svj. god. = $9{,}45 \cdot 10^{15}$ m

Najveće su Andromedina galaksija i naša Mliječna staza, koje svojim gravitacijskim djelovanjem okupljaju druge, manje masivne galaksije Lokalnog jata. Središta galaktičkih jata obično nastanjuje divovska eliptična galaksija nastala privlačenjem i „proždiranjem" susjednih manjih galaksija. Mnoge opažene galaksije nastale su sudarima, odnosno stapanjem manjih galaksija, što su uobičajeni svemirski događaji. S vremenom će se većina susjednih galaksija zbog gravitacijskog međudjelovanja stopiti, a svemir će se sastojati od manjeg broja masivnijih galaksija. Takva sudbina očekuje i Mliječnu stazu, koja će se za pet milijardi godina blisko susresti s Andromedinom galaksijom.

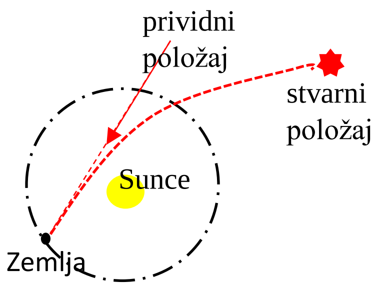
Istraživanje gibanja galaksija unutar jata ukazuje da galaktička jata općenito sadrže desetak puta više tamne (nevidljive) tvari negoli vidljive. Raspodjela tamne tvari razotkrivena je zahvaljujući njezinim gravitacijskim učincima. Jedan od njih je i učinak tzv. gravitacijske leće, koji se očituje u skretanju svjetlosti u gravitacijskom polju.

Einsteinovo tumačenje gravitacije. Einstein ne polazi od pretpostavke da se tijela privlače gravitacijskom silom. Gravitacijsku silu i uzroke gibanja svemirskih objekata, u svojoj općoj teoriji relativnosti, on tumači na drukčiji način od Newtona.

Einstein svojom općom teorijom relativnosti gravitaciju tumači zakrivljenošću prostor-vremenom i najkraći put između dviju točaka ne mora biti pravac. Opća teorija relativnosti tvrdi da se zbog jakih gravitacijskih sila, staze tijela i svjetlosnih zraka izobličuju u blizini velikih masa. Zbog toga elipse (staze po kojima se gibaju planeti) mogu biti izobličene, a svjetlosna se zraka otklanja u blizini Sunca.



Slika 7.7. Dvodimenzionalna analogija zakrivljenosti prostor-vremena (izvor: internet)



Slika 7.8. Zraka svjetlosti skreće u blizini Sunca

PITANJA I ZADACI

1. Kako je Newton zaključio da je gravitacijska sila obrnuto razmjerna kvadratu udaljenosti?
2. Objasnite Newtonov zakon gravitacije.
3. Iz gravitacijske konstante, polumjera Zemlje i akceleracije sile teže izračunajte masu Zemlje.
4. Kako se mijenja gravitacijska sila s udaljenosti od površine Zemlje?
5. Kako glase Keplerovi zakoni?
6. Koliko bi visoko skočio na Mjesecu atletičar koji bi na Zemlji skočio 2 m?
7. Izvedite vezu između obodne brzine i polumjera putanje za umjetni Zemljin satelit koji se oko Zemlje giba po kružnici.
8. Izračunajte prvu i drugu svemirsku (kozmičku) brzinu.
9. Na kojoj je visini iznad Zemljine površine gravitacijsko polje Zemlje četiri puta manje nego na Zemljinoj površini?
10. Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Mjeseca? Kolika je tamo težina čovjeka mase 100 kg?
11. Izračunajte visinu i brzinu umjetnog satelita koji se oko Zemlje giba po kružnici u ekvatorijalnoj ravnini, a uvijek se nalazi iznad iste točke Zemljine površine.
12. Odredite gravitacijsku silu između dva natovarena vagona, od kojih svaki ima 70 t, a udaljenost je njihovih središta masa 200 m.
13. Masa Zemlje je $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, Mjeseca $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, a udaljenost između njihovih središta je $3{,}84 \cdot 10^{5}$ km. Odredite gravitacijsku silu između Zemlje i Mjeseca.
14. Izračunajte težinu tijela mase 1 kg na površini Zemlje, najprije pomoću drugog Newtonovog zakona, a zatim pomoću općeg zakona gravitacije.
15. Odredite težinu tijela mase 2,5 t na visini 250 km od površine Zemlje.
16. Izračunajte uzajamnu potencijalnu energiju Zemlje i Sunca. ($M_z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, njihova međusobna udaljenost $r = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ m).
17. Kolike su prva i druga svemirska (kozmička) brzina?
18. Koju brzinu mora imati umjetni satelit ako želimo da on kruži oko Zemlje na udaljenosti 420 km od njezine površine?
19. Srednja brzina Zemlje, kojom kuži oko Sunca, iznosi oko 30 km s^{-1}, a polumjer putanje kruženja je $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km. Izračunajte masu Sunca.

8. FLUIDI

Tvari se u prirodi obično pojavljuju u tri agregatna stanja: čvrstom, tekućem i plinovitom. Najbolji je primjer za to voda koja se pojavljuje upravo u ova tri agregatna stanja (voda kao tekućina, led u čvrstom stanju i vodena para u plinovitom). Postoji i četvrto agregatno stanje s kojim se rijetko susrećemo, a to je plazma (potpuno ionizirano stanje koje postoji u unutrašnjosti Sunca, a na Zemlji samo u posebnim uvjetima). Zbog nekih zajedničkih svojstava plinove i tekućine nazivamo fluidima. Fluidi lako mijenjaju oblik zbog pokretljivosti svojih molekula. Tekućine su skoro potpuno nestlačive i poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Molekule plina vrlo su pokretljive i imaju velik međumolekulski prostor, zbog čega zauzimaju čitav prostor unutar posude u kojoj se nalaze.

Fluidi mogu mirovati ili se gibati. Hidrostatika je mehanika fluida u mirovanju, a hidrodinamika je mehanika fluida u gibanju.

8.1. TLAK

Čestice fluida nasumično se gibaju udarajući u stijenke posude. Kao posljedica molekularnog gibanja i udaranja u stijenke posude, javlja se tlak. Čestice djeluju silom na stijenke u svim smjerovima. Silu svake molekule možemo rastaviti na dvije komponente: okomitu i paralelnu, što znači da na stijenke djeluju samo okomite komponente. Ukupna sila jednaka je zbroju okomitih sila pojedinih čestica, pa je i ona okomita. Kvocijent okomite sile i površine plohe na koju fluid djeluje zove se tlak (p): $p = \frac{F}{A}$

p je tlak, F okomita sila na površinu i A je površina.

Ako sila nije stalna, tada se tlak u pojedinoj točki definira pomoću izraza: $p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$

Bitna razlika između sile i tlaka je: sila je vektorska veličina, a tlak skalarna veličina.

Gornju relaciju možemo pisati: $d\vec{F} = p d\vec{A}$

Mjerna jedinica SI-ja za tlak je paskal (Pa = N m^{-2}). Mogu se upotrebljavati višekratnici paskala. Tlakovi koje svakodnevno susrećemo iskazuju se u barima: 1 bar = 10^5 Pa

Granice laboratorijski ostvarivih tlakova jesu od najnižih 10^{-12} Pa, pa do najvišega 10^{10} Pa. U unutrašnjosti Zemlje i Sunca tlakovi su još veći.

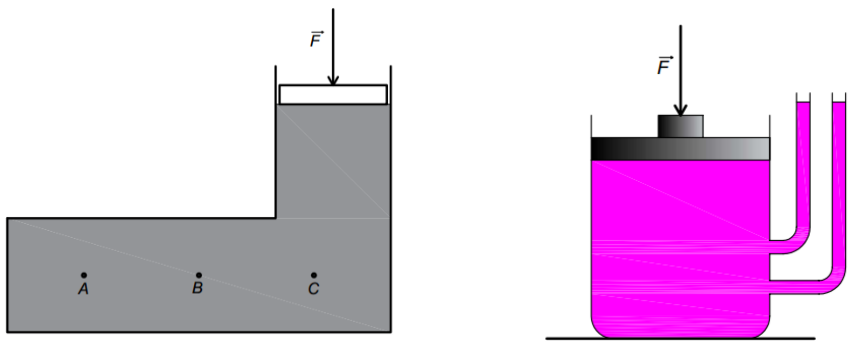
Uređaji za mjerenja tlaka u zatvorenom prostoru zovu se manometri.

8.2. FLUIDI U MIROVANJU

8.2.1. Pascalov zakon

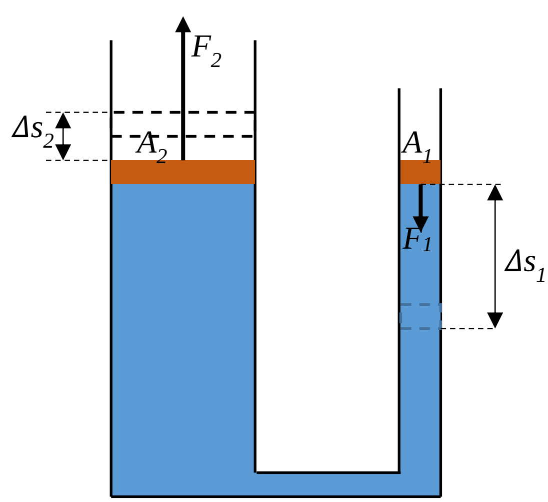
Djelujemo li na fluid nekom vanjskom silom, ona će u fluidu izazvati tlak $p = \frac{F}{A}$ koji se zove vanjski ili hidraulički tlak. On će se prenositi fluidom jednako u svim smjerovima, tako da se pojavljuje u svim točkama fluida (slika 8.1.).

To je poznati Pascalov zakon za vanjski ili hidraulički tlak koji možemo izreći i ovako: u svakoj točki mirnog i nestlačivog fluida, tlak je jednak.



Slika 8.1. Pascalov zakon

Na tom principu temelje se hidraulični uređaji: preše, kočnice, dizalice itd. (slika 8.2).



Slika 8.2. Princip rada hidrauličnih uređaja

Djelujemo li na manji klip silom F_1, ona će proizvesti tlak $p_1 = \frac{F_1}{A_1}$ koji se prenosi kroz tekućinu jednako u svim smjerovima, te će za veći klip vrijediti $p_1 = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$, iz čega slijedi:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

Vidimo da je sila F_2 veća od sile F_1 onoliko puta koliko je puta A_2 veći od A_1.

Tad je rad koji izvrše te dvije sile jednak: $dW = F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2 = p \Delta A \Delta s = p \Delta V$

Sila F_1 djeluje duž pomaka Δs_1 koji je veći od pomaka Δs_2 onoliko puta koliko je F_1 manji od F_2. To je posljedica zakona očuvanja energije.

Mehanički učinak hidrauličnih strojeva je: $\varepsilon = \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$

Djelovanjem sile na papučicu hidraulične kočnice preko klipa u glavnom cilindru automobila, tlak se prenosi na sve dijelove nestlačive tekućine, pa tako i na klip cilindra u kotačima. Kako je površina klipa glavnog cilindra nekoliko puta manja, sila kojom djeluje na kočnice toliko je puta veća od sile na papučicu kočnice.

Primjer 8.1. Hidrauličnom dizalicom diže se teret mase 3 t na visinu 60 cm. Presjek šire cijevi je 2 m^2, a uže 16 dm^2.

a) Koliki je mehanički učinak dizalice?

b) Koliki je obavljeni rad?

c) Kojom silom i na kolikom putu treba djelovati na užem kraku dizalice?

Rješenje:

a) Mehanički učinak je $\varepsilon = \frac{A_2}{A_1} = 12{,}5$

b) Obavljeni rad je $W = F_2 s_2 = mgs_2 = 17658 J$

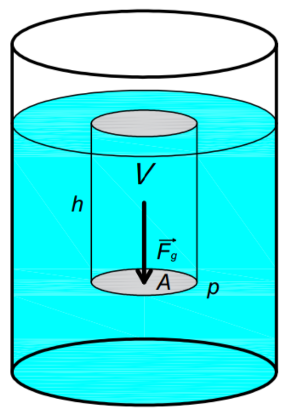
c) Sila kojom treba djelovati je $F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = 2354{,}4 N$

Sila mora djelovati na putu $s_1 = \frac{A_2}{A_1} s_2 = \varepsilon h = 7{,}5 m$

8.2.2. Hidrostatski tlak

To je tlak u tekućini izazvan težinom stupca u tekućini. Ako zaronimo u more, osjećamo pritisak. Što dublje zaronimo, tlak je veći jer je iznad nas veća količina tekućine. Dakle, tlak tekućine raste s dubinom. Izvedimo izraz za hidrostatski tlak.

Zamislimo u tekućini dio tekućine oblika valjka (slika 8.3.) s osnovicom ploštine *A* (ili *S*) i visine *h*. Na horizontalni presjek na dubini *h* svojom težinom djeluje stupac tekućine oblika valjka čiji je obujam: $V = Ah$, mase: $m = V\rho = Ah\rho$, gdje je ρ gustoća tekućine. Težina tog stupca tekućine je *G* ili F_g: $G = mg = Ah\rho g$



Slika 8.3. Hidrostatski tlak

Težina predstavlja silu kojom tekućina oblika valjka pritišće površinu ploštine *A* na dubini *h*. Znači da je tlak na toj dubini: $p = \frac{F}{A} = \frac{G}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = \rho gh$

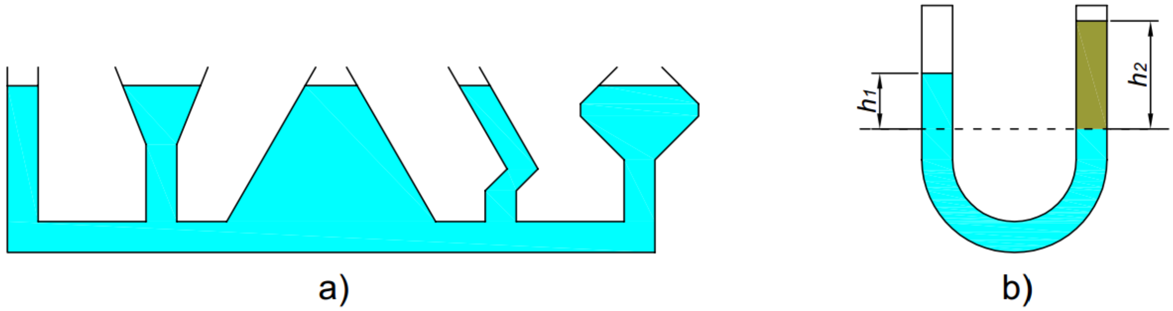
Konačno je izraz za hidrostatski tlak: $p = \rho gh$

Vidimo da hidrostatski tlak u nekoj točki u tekućini ovisi o dubini na kojoj je ta točka, gustoći tekućine i akceleraciji sile teže.

Ako postavimo neku pločicu na dubinu *h*, zbog Pascalova zakona, hidrostatski tlak djeluje na pločicu podjednako u svim smjerovima, s donje i gornje strane.

Ukupni tlak na dubini *h* koji djeluje u svim točkama tekućine je: $p = p_a + \rho gh$, gdje je p_a atmosferski tlak. Dakle, tlaku u fluidu na dubini *h* treba pridodati i vanjski tlak.

U međusobno spojenim posudama razina tekućina u svim posudama nalazi se na istoj visini bez obzira na oblik posude (slika 8.4. a)). To proizlazi iz činjenice da je hidrostatski tlak jednak u svim točkama na istoj dubini. Dakle, pomoću spojenih posuda možemo pokazati da hidrostatski tlak ovisi o visini stupca tekućine.



Slika 8.4. Spojene posude

Ako se u spojenim posudama nalaze dvije tekućine različitih gustoća, ρ_1 i ρ_2 (slika 8.4. b)), tada su razine tekućine različite. Kako tlak u svim točkama tekućine mora biti jednak, vrijedi:

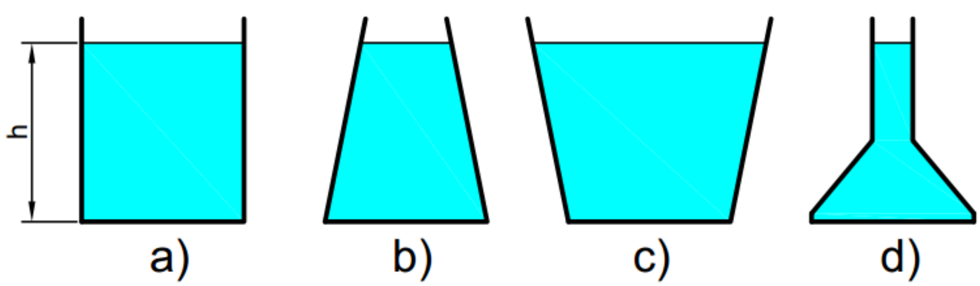
$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2 \ . \qquad (*)$$

Primjer 8.2. U U-cijev, u kojoj se nalazila voda, doliveno je ulje nepoznate gustoće. Mjereno od razine na kojoj se voda i ulje dodiruju, stupac ulja ima visinu 5 cm, a stupac vode 37 mm. Kolika je gustoća ulja?

Rješenje:

Iz izraza (*) slijedi: $\rho_2 = \rho_1 \dfrac{h_1}{h_2}$ $\qquad \rho_2 = 1000 kgm^{-3} \dfrac{3{,}7cm}{5cm}$ $\qquad \rho_2 = 740$ kg m^{-3}

Hidrostatski paradoks. Na slici su prikazane četiri posude s jednakim površinama dna. U svim je posudama ista tekućina nalivena do jednakih visina. U svim primjerima sila na dno je jednaka, što je na prvi pogled neočekivano, pa takav rezultat zovemo hidrostatski paradoks, koji zapravo nije paradoks, već posljedica zakona za hidrostatski tlak. Naime, čini se da će tekućina u trećoj posudi najvećom silom djelovati na dno jer je u toj posudi najviše tekućine, tj. ima najveću težinu. Očito je da sila kojom tekućina djeluje na dno posude ne mora uvijek biti jednaka težini tekućine. Ta je sila jednaka težini tekućine samo u prvoj posudi.



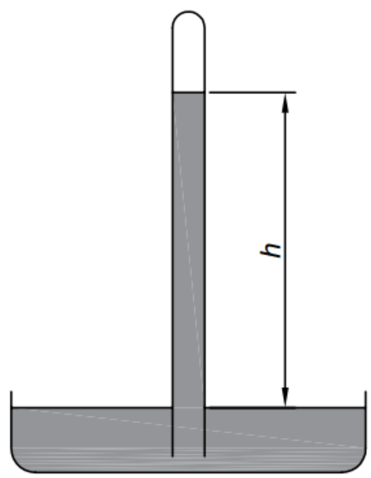
Slika 8.5. Hidrostatski paradoks

Sila na dno u svim je posudama ista. Ukupna težina tekućine najveća je u trećoj posudi (slika 8.5. c), manja u drugoj (slika 8.5. b), a najmanja u četvrtoj (slika 8.5. d).

8.2.3. Atmosferski tlak

Oko Zemlje postoji Zemljina atmosfera, tj. zračni omotač koji Zemlja drži svojom gravitacijskom silom. Upravo zbog težine zračnog stupca iznad Zemljine površine nastaje atmosferski tlak.

Tlak zraka može se mjeriti pomoću Torricellijeva pokusa. Uzmemo s jedne strane zatvorenu staklenu cijev i nalijemo u nju živu, zatim je začepimo prstom, preokrenemo i uronimo u posudu sa živom. Živa će se u cijevi spustiti do određene visine h ovisno o vanjskom tlaku. Iznad žive u gornjem dijelu cijevi nema zraka (ima samo nešto živinih para). Na vanjsku površinu žive u posudi djeluje atmosferski tlak koji drži ravnotežu s hidrostatskim tlakom stupca žive u cijevi, što pišemo: $p_a = \rho g h$; gdje je ρ gustoća žive, a h visina stupca žive.



Slika 8.6. Živin barometar

Izračunajmo koliko iznosi visina stupca žive pri normiranom tlaku koji iznosi 101325 Pa. Uvrštavanjem za ρ = 13595 kg m^{-3} i g = 9,805 m s^{-2}, dobivamo:

$$h = \frac{p_a}{\rho g} = 0{,}76\,\mathrm{m}$$

Plinski zakoni opisuju stanje plina i promjenu stanja plina pomoću četiri empirijske termodinamičke veličine: temperature plina T, tlaka plina p, obujma plina V i količine plina izražene kao broj čestica plina N ili kao broj mola n. Jednadžba stanja plina u općem obliku je:

$$pV = Nk_BT \quad \rightarrow \quad pV = nN_Ak_BT \qquad pV = nRT$$

gdje je $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1} Boltzmannova konstanta, T temperatura u K, R = 8,314 J mol^{-1} K^{-1} univerzalna plinska konstanta, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} Avogadrova konstanta. Ako se stanje plina mijenja uz stalnu temperaturu, taj zakon ima oblik:

$$pV = konst. \qquad \text{ili} \qquad p_1V_1 = p_2V_2$$

i naziva se Boyle-Mariotteov zakon.

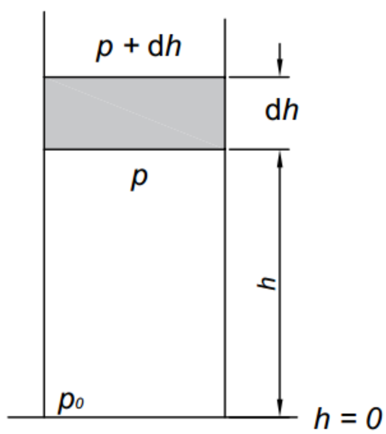
Primjer 8.3. Kada bi ronilac na dubini od 10,3 m udahnuo sabijeni zrak iz boce i držao ga u plućima dok ne izroni na površinu, koliko bi se povećao obujam pluća?

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_a + \rho gh}{p_a} = 2$$

Obujam bi narastao dva puta. Pri naglom izranjanju, kada ronilac nema dovoljno vremena ispuhati zrak, može biti opasno i s tako male dubine jer su alveole već pri udisanju bile raširene i dalje se ne mogu znatno širiti već pucaju.

Atmosferski tlak mijenja se s nadmorskom visinom i pada po barometarskoj formuli koju ćemo izvesti.



Slika 8.7. Uz izvod barometarske formule

Neka je na visini h atmosferski tlak p, a na visini h + dh tlak p + dp. Ako je dh pozitivan, tada je dp negativan jer tlak pada s visinom. Razlika u tlaku dp između ta dva sloja nastaje zbog težine stupca zraka presjeka 1 m^2 i visine dh, a iznosi:

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}h$$

gdje je ρ gustoća zraka na toj visini.

Gustoća zraka funkcija je tlaka i temperature. Pretpostavimo da je atmosfera pri stalnoj temperaturi (izotermna), tada možemo primijeniti Boyle-Mariotteov zakon:

$$pV = p_0 V_o, \qquad p\frac{m}{\rho} = p_o \frac{m}{\rho_0} \qquad \rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} p(h)$$

gdje su p_0 i ρ_0 tlak i gustoća zraka na nadmorskoj visini $h = 0$.

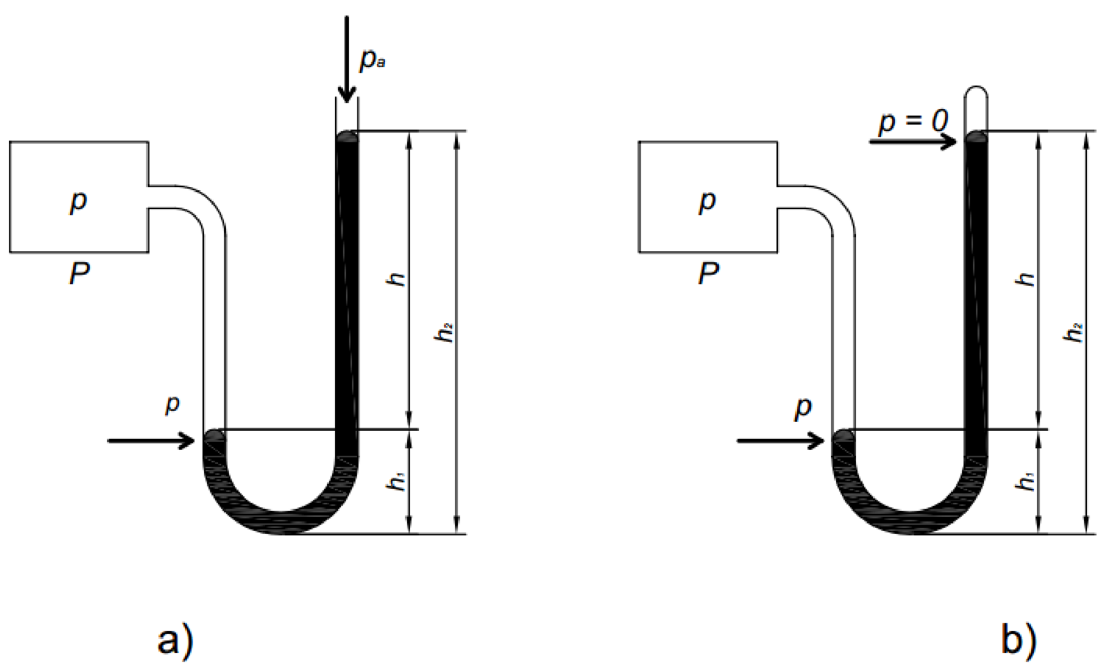
$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} pgdh \quad \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh \qquad \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} gh \qquad p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gh}$$

Ovo je barometarska formula (aerostatički zakon za idealne, mirne i izotermne plinove).

Točniju formulu dobili bismo uzevši u obzir padanje temperature s visinom:

$$p = p_0 \left(1 - \frac{0{,}0065}{288}\right)^{5{,}255}$$

U-cijev kao manometar. Tlak u zatvorenoj posudi možemo mjeriti pomoću cijevi oblika slova U, tzv. U–cijevi. Jedan kraj cijevi vezan je uz posudu u kojoj mjerimo tlak, a drugi je kraj otvoren. Ovakvu cijev koja služi za mjerenje tlaka zovemo otvoreni manometar (slika 8.8.a). Ako je drugi kraj U-cijevi zatvoren, zovemo je zatvoreni manometar (slika 8.8.b).



Slika 8.8. Manometri

Tlak u posudi P mjeren pomoću otvorenog manometra je: $p = p_a + \rho g(h_2 - h_1) = p_a + \rho gh$, tlak mjeren pomoću zatvorenog manometra je: $p = \rho g(h_2 - h_1) = \rho gh$.

Primjer 8.4. Podmornica je oštećena na dubini od 80 m. Članovi posade pokušavaju izaći van tako da podižu poklopac otvora površine 1,1 m za 0,7 m. Ako je gustoća mora 1024 kg m^{-3}, kolikom silom treba gurati poklopac da bi ga se pomicalo?

Rješenje:

h = 80 m

A = 0,77 m^2

ρ = 1024 kg m^{-3}

F = ? $$F = pA = (p_a + \rho gh)A = 708804{,}25 \text{ N}$$

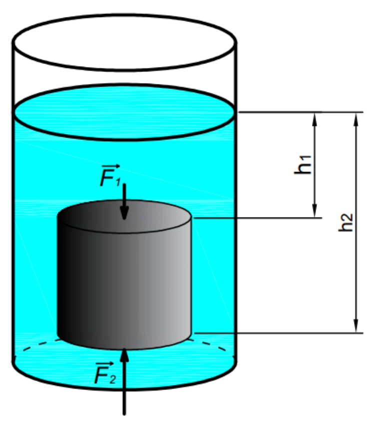
Ova sila ekvivalentna je masi 70,88 tona.

8.2.4. Uzgon. Arhimedov zakon

Kada je tijelo uronjeno u fluid, na njega djeluje sila čiji je smjer suprotan smjeru sile teže. Ta sila zove se uzgon. Uzgon nastaje zbog razlike hidrostatskih tlakova koji djeluju na tijelo na različitim dubinama.

Na slici 8.9. prikazano je tijelo u obliku valjka, gustoće ρ, uronjeno cijelim svojim obujmom u tekućinu. Gornja je ploha valjka na dubini h_1, a donja na dubini h_2. Hidrostatski tlak na donju plohu veći je nego na gornju jer se nalazi na većoj dubini. Hidrostatski tlak na gornju plohu je:

$p_1 = \frac{F_1}{A} = \rho_{tek} g h_1$, a tlak na donju plohu: $p_2 = \frac{F_2}{A} = \rho_{tek} g h_2$



Slika 8.9. Uz izvod uzgona

Hidrostatski tlak djeluje i na oplošje valjka, ali se sile koje djeluju sa suprotnih strana međusobno poništavaju jer su jednake. Uzgon na valjak nastaje zbog razlike hidrostatskih tlakova na donju i gornju plohu. Uzgon ima smjer prema gore (slika 8.9.) i iznosi:

$$F_u = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)A = (\rho_{tek} g h_2 - \rho_2 g h_1)A = \rho_{tek} g A (h_2 - h_1) = \rho_{tek} g A h$$

$$F_u = \rho_{tek} g V_{uronjenog\ dijela\ tijela}$$

Dakle, na tijelo uronjeno u fluid djeluje sila teža prema središtu Zemlje i uzgon u suprotnom smjeru, tako da je rezultantna sila, tj. težina tijela u fluidu:

$$G' = F_g - F_u$$

što predstavlja **Arhimedov zakon** koji možemo izreći riječima: tijelo uronjeno u tekućinu (fluid) lakše je za silu uzgona. Uzgon je jednak težini tijelom istisnute tekućine:

$$F_u = G_{tek} = \rho_{tek} g V_{uronjenog\ dijela\ tijela} = m_{istisnute\ tek} g$$

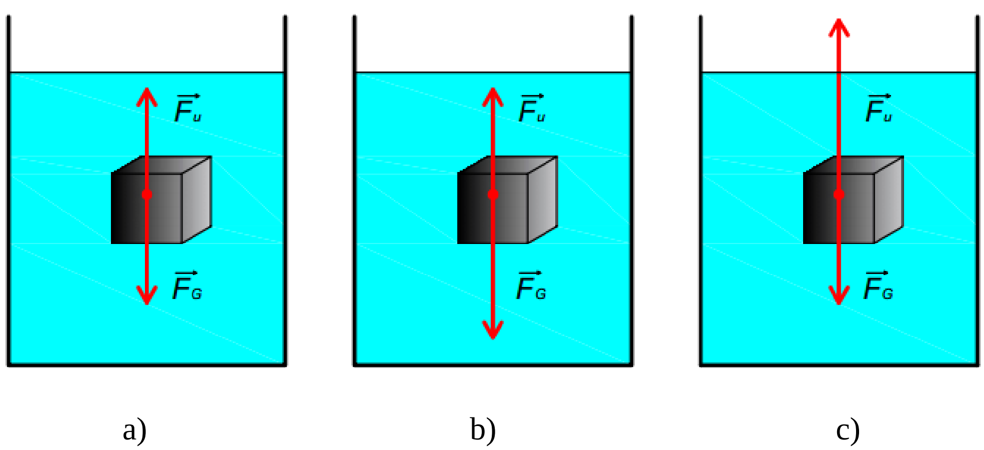
Može se pokazati da uzgon ne ovisi o obliku tijela niti o dubini na kojoj se tijelo nalazi u tekućini.

Uvjeti plivanja:

Tijelo lebdi kada je uzgon jednak sili teži $F_u = F_g$, tada je $\rho_{tek} = \rho_{tijela}$. Slika 8.10. a)

Tijelo tone ako je uzgon manji od sile teže $F_u < F_g$, tada je $\rho_{tek} < \rho_{tijela}$. Slika 8.10. b)

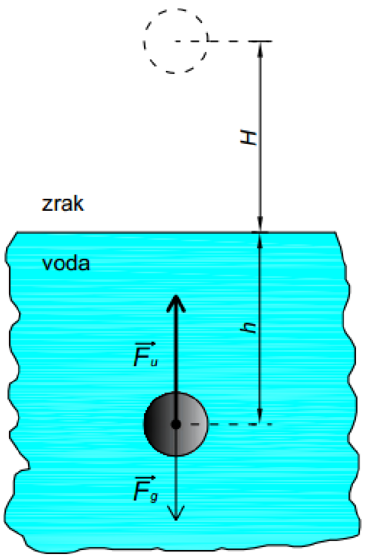
Tijelo pliva ako je uzgon veći od sile teže $F_u > F_g$. tada je $\rho_{tek} > \rho_{tijela}$. Slika 8.10. c)



Slika 8.10. Uvjet plivanja

Primjer 8.5. Gumena lopta mase m i radijusa R uronjena je u vodu do dubine h. Zanemarivši otpor vode i zraka, izračunati visinu H do koje će lopta odskočiti (u odnosu na površinu vode) nakon što ju pustimo.

Rješenje:



$$W = \Delta E$$
$$W = E_{gp}$$
$$F_R h = mgH$$
$$\left(F_U - F_g\right)h = mgH$$
$$H = \frac{\left(F_U - F_g\right)h}{mg} = \frac{(\rho_v gV - mg)h}{mg} = \frac{\left(\rho_v g\dfrac{4R^3\pi}{3} - mg\right)h}{mg}$$
$$H = \frac{\left(\dfrac{4R^3\pi}{3}\rho_v - m\right)h}{m}$$

Slika 8.11. Uz primjer 8.5.

Primjer 8.6. Tijelo oblika kocke duljine brida 0,5 m visi na niti i uronjeno je u more gustoće 1025 kg m^{-3} s gornjom površinom na dubini od 25 cm. Ako je masa tijela 400 kg, kolika je napetost niti?

Rješenje:

V = 0,125 m^3

ϱ = 1025 kg m^{-3}

h = 25 cm

<u>m = 400 kg</u>

F_N = ?

$$F_N = F_g - F_u = mg - \rho_{tekućeku} gV = 2718{,}75 \text{ N}$$

8.3. FLUIDI U GIBANJU

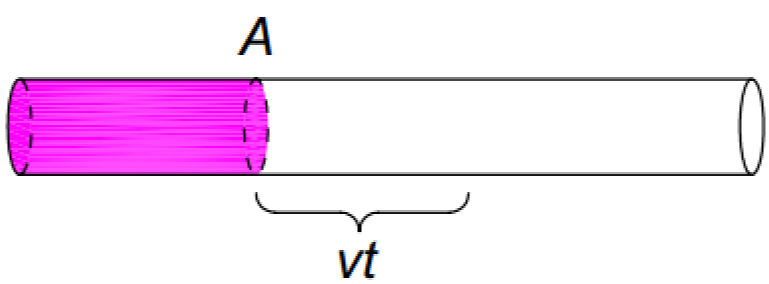
Mehanika fluida u gibanju zove se hidrodinamika. Osvrnut ćemo se na gibanje idealnog fluida, nestlačivog i onog u kojem nema unutarnjeg trenja.

Gibanje fluida (tekućine ili plina) nazivamo strujanjem ili protjecanjem koje nastaje zbog vlastite težine fluida ili zbog razlike u tlakovima između dva mjesta u fluidu. Prema putanji strujanja, strujanje fluida može biti laminarno i vrtložno. Predočujemo ga pomoću strujnica, crta kojima su tangente u svakoj točki u smjeru brzine gibanja. Za laminarno gibanje, strujnice su neprekinute krivulje. Pri vrtložnom gibanju, strujnice su zavinute prekinute krivulje.

Prema promjenjivosti brzine, razlikuje se stacionarno strujanje, kod kojega je količina tvari koja prođe kroz neki presjek konstantna, i turbulentno, pri kojem se stvaraju vrtlozi i miješa tekućina.

Slika 8.12. Laminarno i turbulentno strujanje

8.3.1. Protok i brzina protjecanja fluida



Slika 8.13. Uz definiciju protoka

Volumen fluida koji u jedinici vremena proteče kroz presjek cijevi naziva se volumni protok:

$$q_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Jedinica protoka je $m^3 s^{-1}$.

Maseni protok je omjer mase koja je protekla kroz presjek cijevi i vremena:

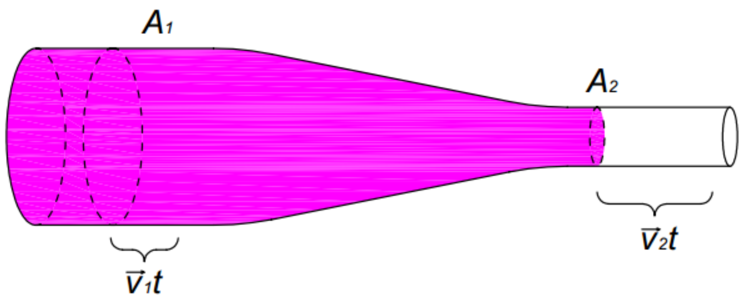
$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho q_v$$

Iz slike 8.13. vidljivo je da je:

$$q_v = \frac{Av\Delta t}{\Delta t} = Av$$

Volumni protok jednak je umnošku površine presjeka i brzine strujanja.

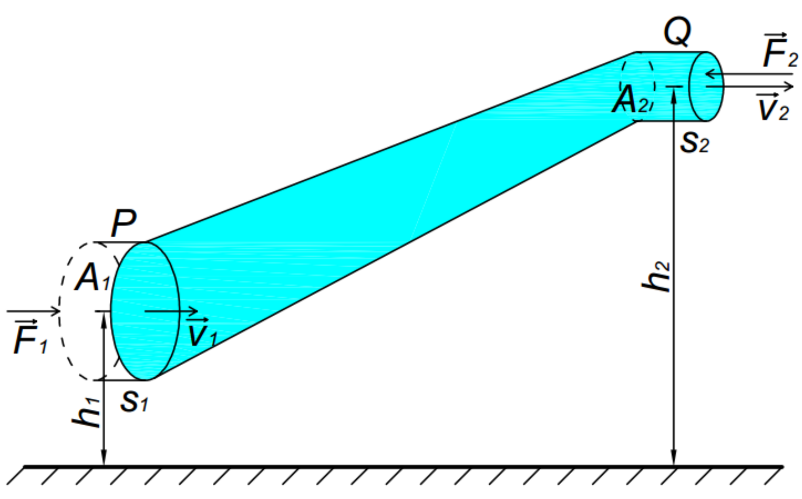
Na slici 8.14. cijev je na jednom kraju šira nego na drugom. Tok mora biti stacionaran, tj. zbog nestlačivosti tekućine, protok mora biti stalan $q_1 = q_2$: $A_1 v_1 = A_2 v_2$



Slika 8.14. Uz izvod jednadžbe kontinuiteta

To je jednadžba kontinuiteta (zakon o neuništivosti tvari) za stacionarno strujanje. Možemo je zapisati i ovako: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$

8.3.2. Bernoullijeva jednadžba



Slika 8.15. Uz izvod Bernoullijeve jednadžbe

Promatrajmo cijev kroz koju struji fluid između dva presjeka s površinama A_1 *i* A_2 i kojoj su krajevi na visinama h_1 *i* h_2 (slika 8.15.). Tekućina u cijevi protječe slijeva udesno. Donji kraj fluida pomaknuo se za s_1, a gornji za s_2. Zbog nestlačivosti fluida, oba dijela fluida imaju jednaku masu: $m_1 = m_2 = m = \rho V$.

Promjena potencijalne energije je:

$$\Delta E_p = m_2 g h_2 - m_1 g h_1 = \rho V g h_2 - \rho V g h_1$$

Promjena kinetičke energije je:

$$\Delta E_k = \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{\rho V v_2^2}{2} - \frac{\rho V v_1^2}{2}$$

Ukupna promjena mehaničke energije je:

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k$$

Da bi se fluid pomaknuo za s_1, odnosno s_2, na njega treba djelovati silama F_1 i F_2, tj. tlakovima na oba kraja. Sile F_1 i F_2 imaju suprotne smjerove. Pri tome je obavljeni rad:

$$W = F_1 s_1 - F_2 s_2 = p_1 A_1 s_1 - p_2 A_2 s_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

Zbog nestlačivosti oba su obujma jednaka $V_1 = V_2 = V$, pa je

$$W = (p_1 - p_2)V$$

Obavljeni rad jednak je promjeni energije:

$$W = \Delta E$$

$$(p_1 - p_2)V = \rho V g h_2 - \rho V g h_1 + \frac{\rho V v_2^2}{2} - \frac{\rho V v_1^2}{2}$$

Sređivanjem dobijemo izraz za Bernoullijevu jednadžbu:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

U tekućini koja se giba pojavljuje se vanjski tlak p, tzv. statički tlak, hidrostatski tlak $p_h = \rho g h$ koji nastaje uslijed težine samog fluida, i dinamički tlak $p_d = \frac{\rho v^2}{2}$ koji postoji samo ako se fluid giba. Zbroj statičkog i dinamičkog tlaka zovemo hidrodinamički tlak. Ukupan je zbroj svih tlakova u tekućini prilikom gibanja tekućine stalan:

$$p + p_h + p_d = p_u = konst.$$

To je izraz za Bernoullijevu jednadžbu. Ona je posljedica zakona očuvanja energije. Konačno možemo napisati da na svakom dijelu cijevi vrijedi:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = konst.$$

To znači da je u svakoj točki neke strujnice zbroj statičkog tlaka p, tlaka ρgh uzrokovanog visinskom razlikom pojedinih dijelova fluida, i dinamičkog (brzinskog) tlaka $\frac{\rho v^2}{2}$ uvijek konstantan.

Ako je cijev horizontalna ili ako je gustoća fluida malena (plinovi), te je tlak $\rho gh(h_2 - h_1)$ zanemariv, Bernoullijeva jednadžba poprima oblik:

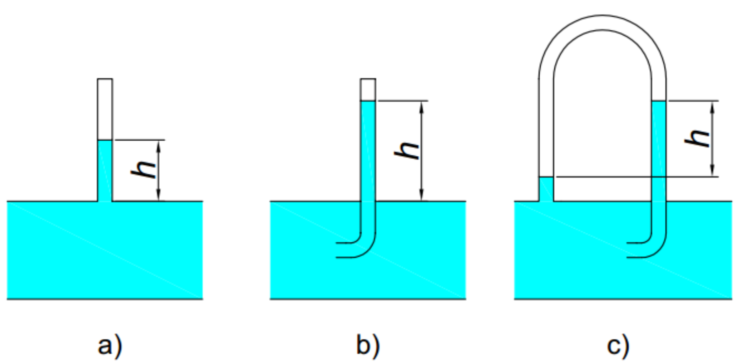
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = konst.$$

Iz jednadžbe vidimo, ako je $A_1 > A_2$, tada je $v_1 < v_2$ i $p_1 > p_2$, tj. na mjestima gdje je brzina veća tlak je manji i obrnuto.

Kada fluid miruje $(v_1 = v_2 = 0)$, Bernoullijeva jednadžba prelazi u:

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g h$$

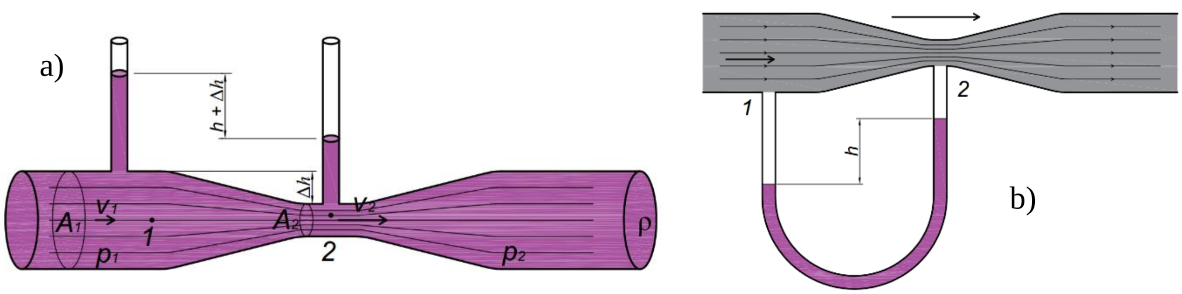
To je izraz za razliku tlakova u mirnom fluidu, tj. za hidrostatski tlak, pa zaključujemo da za mirnu tekućinu Bernoullijeva jednadžba vrijedi u hidrostatici.



Slika 8.16. Mjerenje tlaka: a) statičkog, b) hidrodinamičkog, c) dinamičkog

8.3.3. Primjene Bernoullijeve jednadžbe

Venturijeva cijev



Slika 8.17. Venturijeva cijev, a) protok tekućine, b) protok plina

To je cijev u kojoj je srednji dio sužen. Služi za mjerenje brzine i protoka fluida. Primjenom Bernoullijeve jednadžbe:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = konst.$$

i jednadžbe kontinuiteta: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

dobijemo izraz za brzinu fluida:

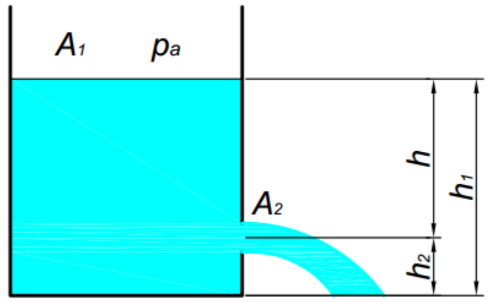
$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}}$$

odnosno za protok fluida:

$$q_v = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}}$$

Iz poznatih presjeka A_1 i A_2, očitavanjem razlike tlakova na manometru Venturijeve cijevi, možemo izračunati brzinu ili protok fluida kroz cijev.

Istjecanje tekućine iz posude



Slika 8.18. Istjecanje tekućine kroz mali otvor

Neka se na stijenci široke otvorene posude na dubini tekućine *h* nalazi mali otvor (slika 8.18.). Odredimo brzinu tekućine kroz taj otvor.

Primjenom Bernoullijeve jednadžbe na dva presjeka, i to otvorenu posudu A_1 i za presjek A_2 mlaza tekućine na otvoru. Na presjeku A_1 tlak p_1 jednak je atmosferskom tlaku p_a, a brzina vrlo malena (jednaka nuli). Na presjeku A_2 tlak je također jednak atmosferskom tlaku p_a, a brzina je v_2 koja slijedi iz:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

odnosno: $$p_a + \rho g h_1 = p_a + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh}$$

To je Torricellijev zakon istjecanja tekućine kroz mali otvor.

Zašto olujni vjetar može dignuti krov kuće

Kada vjetar nalijeće na krov, brzina strujanja zraka s vanjske (gornje) strane krova ima određenu vrijednost v_2, a s unutarnje strane krova zrak praktički miruje, $v_1 = 0$, pa iz Bernoullieve jednadžbe slijedi:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho_z v_2^2$$

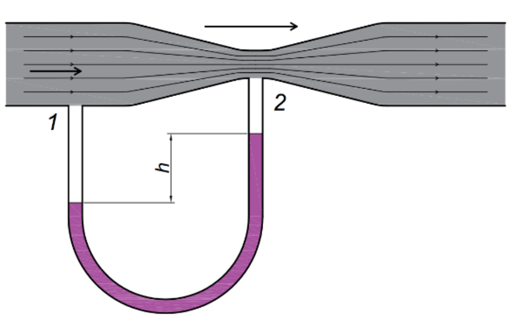
Na krov djeluje sila dizanja:

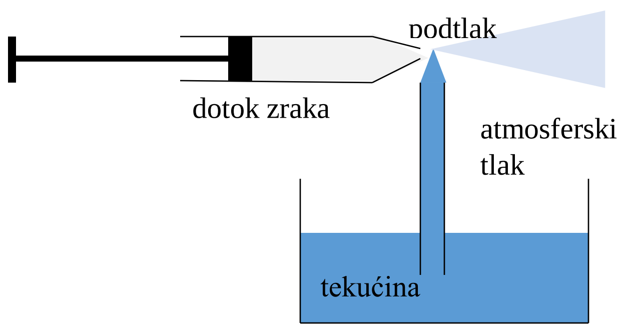
$$F_{dit} = (p_1 - p_2)A = \frac{1}{2} A \rho_z v_2^2$$

Gdje je A površina krova i ρ_z gustoća zraka. Ako je brzina vjetra dovoljno velika, sila dizanja dovoljno je jaka da skine krov skuće.

Negativni tlak

Kada se brzina tekućine u cijevi dovoljno poveća, povećava se i dinamički tlak tekućine, tako da se prema Bernoullijevoj jednadžbi statički tlak smanji ispod atmosferskog. Ta pojava, da se statički tlak tekućine smanji ispod atmosferskog, naziva se negativni tlak. Najčešće se postiže sužavanjem cijevi kroz koju struji tekućina. Na tom načelu radi raspršivač.

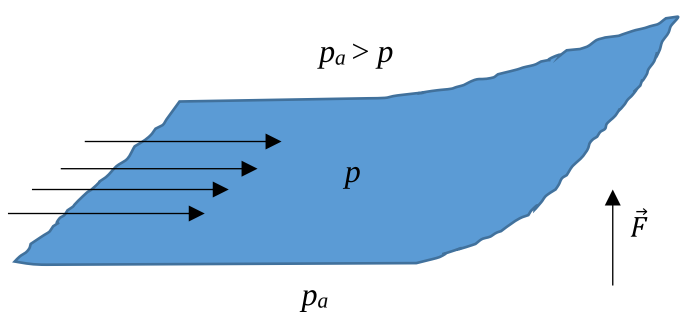




Slika 8.19. Stvaranje negativnog tlaka **Slika 8.20.** Raspršivač

Dva broda koja plove jedan pored drugoga mogu se sudariti zbog negativnog tlaka.

Puhanjem se list papira podiže zbog toga jer se iznad njega povećava dinamički tlak, a statički smanjuje, pa je tlak iznad lista papira manji od atmosferskog tlaka s donje strane. Zbog razlike tlakova javlja se sila dizanja prema gore.



Slika 8.21. Princip avionskog krila

Primjer 8.6. Kolika je brzina zraka v_2 na gornjoj strani krila aviona i kolika je masa aviona ako je brzina na donjoj strani v_1 = 100 m s^{-1}, a nastala sila dizanja održava avion u zraku? Razlika tlaka na donjoj i gornjoj plohi krila je Δp = 800 Pa, a površina avionskih krila A = 40 m^2. Gustoća zraka je 1,3 ·10^{-3} g cm^{-3}.

Rješenje:

v_1 = 100 m s^{-1}

Δp = 800 Pa

A = 40 m^2

ρ = 1,3 ·10^{-3} g cm^{-3} =1,3 kg m^{-3}

v_2 = ?

m = ?

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

$$p_1 - p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2} \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho} + v_1^2} = 105{,}97 \text{ m s}^{-1}$$

Sila dizanja mora biti veća ili jednaka težini aviona $F_{diz} = \Delta p A$ = 32000 N

$$F_{diz} = G = mg \qquad\qquad m = \frac{G}{g} = 3200 \text{ kg}$$

PITANJA I ZADACI

1. Definirajte tlak i navedite jedinice za tlak.
2. Što kaže Pascalov zakon? Koji se uređaji na njemu baziraju?
3. Izvedite izraz za hidrostatski tlak u tekućini. Koliki je ukupni tlak na dubini vode 10 m pri normiranom atmosferskom tlaku?
4. Opišite spojene posude. Objasnite hidrostatski paradoks.
5. Što je manometar? Objasnite otvoreni i zatvoreni manometar.
6. Objasnite živin barometar.

7. Što je uzgon? Izvedite formulu za uzgon. Što kaže Arhimedov zakon? 0pišite neke od pokusa u vezi s uzgonom.

8. Kako se definira protok fluida? Izvedite i objasnite jednadžbu kontinuiteta. U kojim uvjetima ona vrijedi?

9. Objasnite primjenu Bernoullijeve jednadžbe?

10. Što je statički, a što dinamički tlak? Kako se mjere? Koliki je dinamički tlak ako zrak struji brzinom 108 km h^{-1}?

11. U U-cijev nalivena je voda, a onda u jedan krak tekućina nepoznate gustoće, tako da se ne miješa s vodom. Visina stupca vode mjerena od razine gdje se tekućine dodiruju je 20 cm, a visina stupca druge je 25 cm. Kolika je gustoća tekućine?

12. Valjkasta posuda visine 2 m ima kružni otvor polumjera 2 cm na visini 60 cm od dna posude. Kolika sila djeluje na čep stavljen u kružni otvor ako je posuda do vrha napunjena vodom? (Rješenje: 38,8 N)

13. Koliki je ukupni tlak u jezeru na dubini 8 m?

14. U otvorenom manometru sa živom razlika stupaca žive iznosi 18 mm. Kolika je razlika tlakova? (Rješenje: 24 hPa)

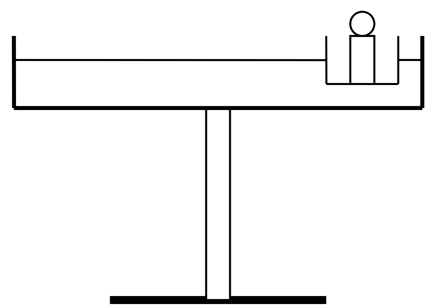
15. Koliki je tlak zraka na nadmorskoj visini od 6500 m? Raspravite o raznim načinima rješavanja i procijenite točnost odgovora. (Rješenje: 452 hPa)

16. Koji dio ledene sante viri iznad morske površine? (Gustoća leda je 900 kg m^{-3}, a gustoća morske vode 1020 kg m^{-3}).

17. Predmet od legure bakra i zlata teži u zraku 0,490 N, a uronjen u alkohol 0,460 N. Odredite masu zlata u predmetu. Zanemarite uzgon u zraku.

18. Iz pumpe u prizemlju zgrade voda ulazi u cijev promjera 2,4 cm pod tlakom 400 kPa, brzinom 1 m s^{-1}. Koliki je volumni protok vode? Kolika je brzina i tlak u potkrovlju zgrade na visini 30 m ako je tamo promjer cijevi dva puta manji nego u prizemlju?

19. Posuda ispunjena vodom postavljena je u labilnu ravnotežu. U posudu stavimo uteg tako da plovi uz rub (slika 8.22.). Hoće li posuda pasti s grede? Obrazložiti odgovor.



Slika 8.22. Uz zadatak 19.

20. Ukupna masa balona napunjena helijem iznosi m = 50 kg, a volumen V = 100 m^3. Kolika je sila koja diže balon s površine Zemlje ako je gustoća zraka pri površini ρ = 1,29 kg m^{-3}? Kolika je gustoća sloja zraka u kojem će balon lebdjeti?
21. Kroz cijev promjera 2 cm teče voda konstantnim protokom od 0,2 L s^{-1}. Na jednom mjestu cijev je sužena, tako da joj je promjer 0,5 cm. Kolika je brzina vode u cijevi, a kolika u suženju cijevi? Kolika je razlika tlakova u širem i užem dijelu cijevi?

9. TITRANJE

Titranje je periodično gibanje materijalne točke kod kojeg se ona giba po nekoj putanji naizmjenično oko ravnotežnog položaja u oba suprotna smjera. Navedimo nekoliko primjera titranja u prirodi: list na stablu titra pod utjecajem vjetra, drvce na površini mirne vode giba se gore-dolje kad površinu uznemirimo bacivši u vodu kamen, njihalo ure njihalice njiše, stap benzinskog motora giba se stalno s jednog kraja cilindra na drugi, sjene kuglice koja se giba po kružnici titra. Sva se ta gibanja ponavljaju nakon određenog vremena koje zovemo period (T). Dakle, to su periodična gibanja.

Navedimo neke veličine s pomoću kojih možemo opisati mehaničko titranje. To su u prvom redu period T i frekvencija f.

Pri titranju je period T vrijeme jednog titraja, a frekvencija f broj je titraja u jedinici vremena, tj. u 1 sekundi. Kako bismo što točnije izmjerili period pri titranju? Tako da mjerimo vrijeme za više titraja, a onda ukupno vrijeme podijelimo s brojem titraja:

$$T = \frac{t}{N}$$

Kako je frekvencija broj titraja u jednoj sekundi: $f = \frac{N}{t}$ zaključujemo vezu između perioda i frekvencije: $T = \frac{1}{f}$ odnosno $f = \frac{1}{T}$. Jedinica za frekvenciju je 1 herc (Hz). 1 Hz = s^{-1}.

Položaj tijela pri titranju određujemo elongacijom *x*. Elongacija materijalne točke pri titranju udaljenost je točke od ravnotežnog položaja. Najveću elongaciju koju tijelo koje titra postigne pri titranju nazivamo amplitudom (A, x_0, y_0**).**

Svako titranje uzrokuje određena sila koja se mijenja po iznosu, a povremeno i po smjeru (orijentaciji). Zakone harmonijskog titranja najbolje možemo uočiti kod gibanja tijela mase *m* učvršćenog na kraju horizontalne opruge. Kada tijelo izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo, ono titra zbog utjecaja elastične sile opruge. To je najjednostavnije titranje kod kojeg je sila koja izvodi titranje (to je sila opruge) u svakom času upravno proporcionalna elongaciji i zove se **jednostavno harmonijsko titranje**, a sustav koji titra zbog harmonijske sile zove se **harmonijski oscilator**.

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

gdje je *k* faktor proporcionalnosti koja se često zove konstanta opruge. Sila i elongacija imaju suprotne orijentacije. Elongaciju uvijek mjerimo od položaja ravnoteže, a sila uvijek ima smjer (orijentaciju) prema ravnotežnom položaju.

Pokazalo se da harmonijsko titranje možemo dovesti u vezu s jednolikim gibanjem po kružnici. Na slici 9.1. prikazali smo materijalnu točku *M* koja se giba jednoliko po kružnici polumjera *r*. Njezina sjena titra na zastoru Z gore-dolje između točaka A_1 *i* B_1. Amplituda titranja jednaka je polumjeru kružnice $A = r$. Sila koja izvodi titranje komponenta je centripetalne sile koja izvodi kružno gibanje, a orijentacija je ista kao promatrano titranje. Iz slike 9.1. vidljivo je da vrijedi:

$$\frac{F}{F_{cp}} = \frac{x}{r} \qquad \rightarrow \quad F = \frac{F_{cp}x}{r} = \frac{4\pi^2 rmx}{T^2 r}$$

$$F = \frac{4\pi^2 m}{T^2}x$$

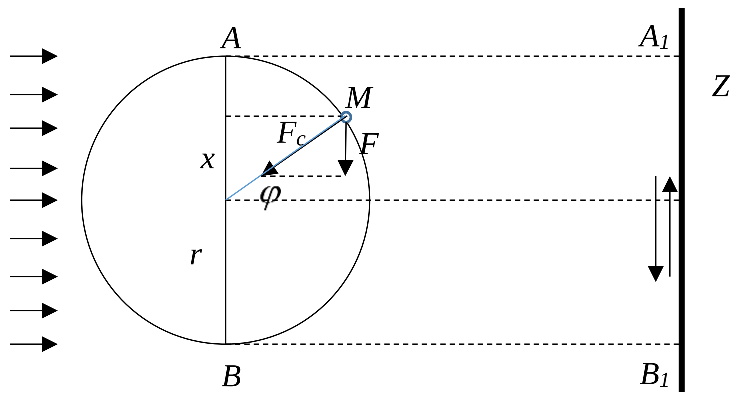
Vidimo da je sila *F* upravno razmjerna elongaciji *x* jer su veličine ispred *x* konstantne za određeno titranje tj. $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$. To znači da je titranje sjene materijalne točke koja se giba jednoliko po kružnici harmonijsko. Iz izraza za *k* možemo izvesti izraz za period harmoničnog titranja,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Period ne ovisi o amplitudi titranja, što je karakteristika svakog harmonijskog titranja.

Veličina $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ zove se **kružna frekvencija** za koju možemo pisati i $k = \omega^2 m$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

.



Slika 9.1. Analogija titranja i kružnog gibanja

Iz slike 9.1. dobivano elongaciju: $\sin\varphi = \frac{x}{r}$ $\rightarrow$ $x = r\sin\varphi$

gdje je φ kut između početnog položaja polumjera i njegova pripadajućeg trenutačnog položaja i zovemo ga **faznim kutom** ili **fazom titranja**. Kako je $\varphi = \omega t$, a $r = A$ jednadžbu elongacije možemo pisati:

$$x = A\sin\omega t$$

Promatramo li titranje materijalne točke od nekog drugog početnog položaja koji nije ravnotežni, jednadžba elongacije općenito je:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

gdje je x elongacija, A amplituda, $(\omega t+\varphi_0)$ fazni kut ili faza titranja, φ_0 početni fazni kut ili faza titranja u trenutku t = 0.

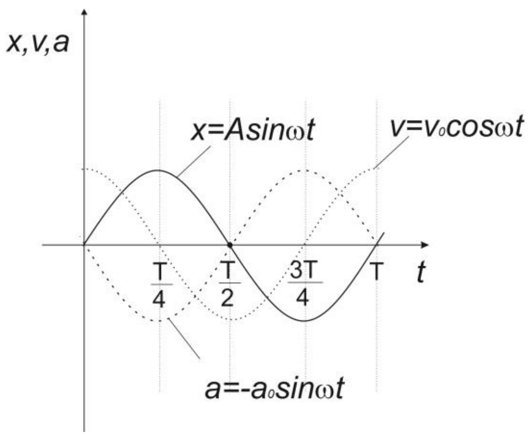
Derivirajući elongaciju po vremenu dobivamo brzinu i akceleraciju. Prva derivacija elongacije po vremenu je brzina tijela koje titra:

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)=v_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$v_0 = A\omega$ je maksimalna brzina pri titranju.

Druga derivacija elongacije po vremenu je akceleracija:

$$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2 x$$



Slika 9.2. Ovisnost elongacije, brzine i akceleracije pri harmonijskom titranju o vremenu

Primjer 9.1. Tijelo mase 0,5 kg učvršćeno je na kraju horizontalne opruge konstante k = 100 N m^{-1}. Tijelo izvučemo iz ravnotežnog položaja za 10 cm i pustimo, ono će zbog utjecaja elastične sile opruge harmonijski titrati (trenje zanemarimo). Koliki su period, kutna frekvencija,

frekvencija, amplituda, iznos najvećeg ubrzanja, početni fazni kut. Napišite izraz za elongaciju i prikažite vremensku ovisnost elongacije.

Rješenje

m = 0,5 kg

k = 100 N m^{-1}

<u>t = 0, $x = x_0$ = 10 cm</u>

$T, f, \omega, A, a_0, \varphi_0, x$ = ?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}44\ \text{s} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 2{,}25\ \text{Hz} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14{,}14\ \text{s}^{-1}$$

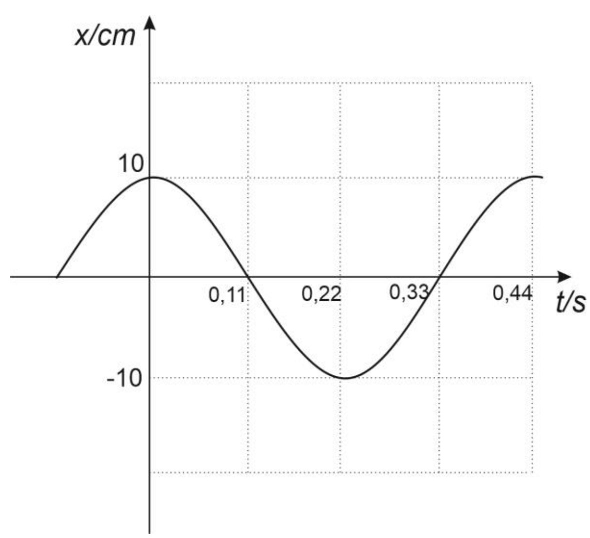
t = 0, x = A= 10 cm, $\quad a_0 = \omega^2 A = \frac{k}{m} A = 20\ \text{m s}^{-2}$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$10 = 10\sin(14{,}14 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

$$x = 10cm\sin(14{,}14s^{-1}t + \frac{\pi}{2})$$



Slika 9.3. Ovisnost elongacije o vremenu

Primjer 9.2. Tri opruge vezane su serijski, a zatim paralelno. Naći rezultantnu konstantu.

Rješenje

Serijski spoj:

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

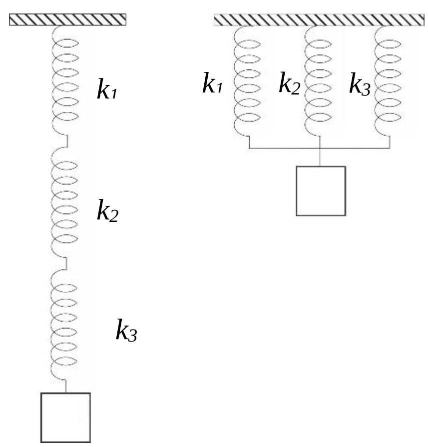
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

Paralelni spoj:

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$kx = k_1 x + k_2 x + k_3 x$$

$$k = k_1 + k_2 + k_3$$



Slika 9.4. Serijski i paralelni spoj opruga

9.1. ENERGIJA OSCILATORA

Pri titranju materijalne točke, stalno se izmjenjuju potencijalna i kinetička energija. U amplitudnom položaju, potencijalna energija je maksimalna, a kinetička je jednaka nuli. Gibajući se prema ravnotežnom položaju, potencijalna se smanjuje, a kinetička raste tako da se u ravnotežnom položaju sva pretvorila u kinetičku. U bilo kojem položaju zbroj kinetičke i potencijalne energije jednak je potencijalnoj energiji u amplitudnom položaju. Dakle, ukupna energija je konstantna, oscilator je zatvoreni sustav za koji vrijedi zakon očuvanja energije. Pokažimo to.

Djelovanjem sile na materijalnu točku na elastičnoj opruzi na nju djeluje i elastična sila zbog čega materijalna točka ima potencijalnu energiju koja je jednaka radu te sile pri pomaku za elongaciju *x* iz ravnotežnog položaja

$$E_p = -W = -\int_0^x F dx = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Kinetička energija harmonijskog oscilatora jednaka je kinetičkoj energiji materijalne točke

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \frac{kA^2(1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0))}{2}$$

$$E_k = \frac{k(A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0))}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

Ukupna energija zbroj je potencijalne i kinetičke energije:

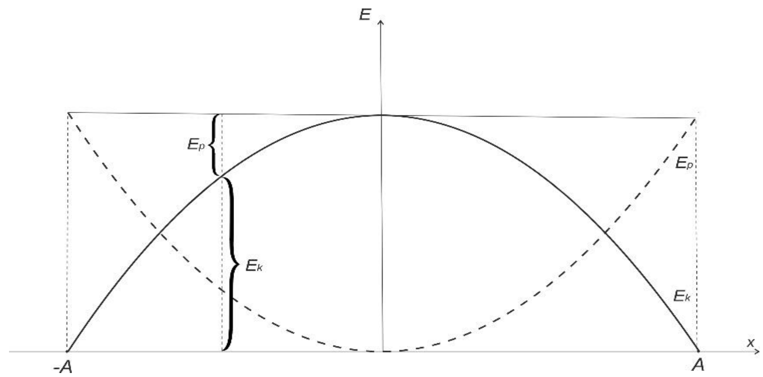
$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$

Model titranja tijela mase *m* na opruzi može se primijeniti kod:

- Titranja zgrada, mostova i bilo kojeg mehaničkog sustava
  Titranja naboja u električnom titrajnom krugu
  Titranja atoma u krutom tijelu

Varijacija akustičnog tlaka u glazbenom instrumentu



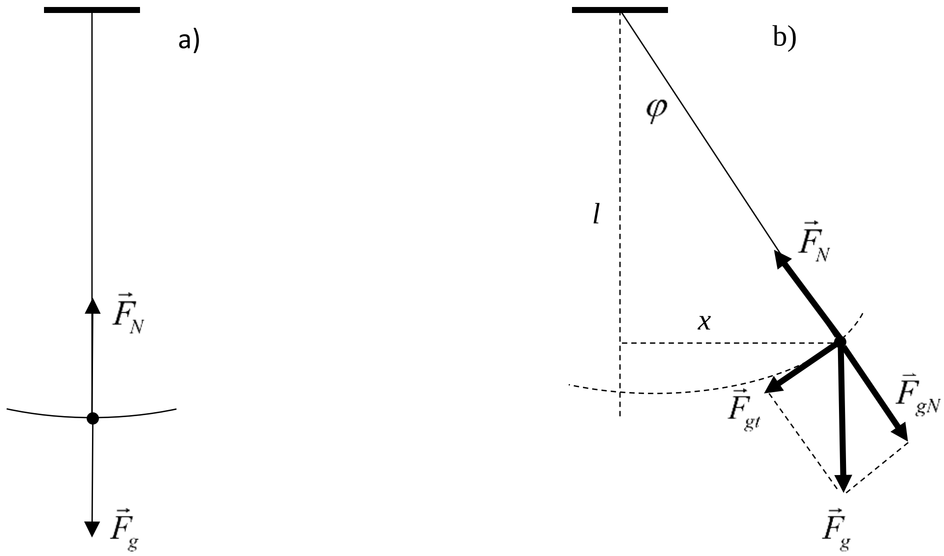
Slika 9.5. Ovisnost energije harmonijskog titranja o elongaciji

9.2. MATEMATIČKO NJIHALO

Sitno tijelo koje zamišljamo kao materijalnu točku obješeno na nerastezljivu nit duljine *l* zanemarive mase zove se matematičko njihalo. Kada njihalo miruje u ravnotežnom položaju, napetost niti uravnotežena je silom težom F_g na materijalnu točku (slika 9.6. a). Kada je njihalo za neki kut φ izvan položaja ravnoteže (slika 9.6. b), radijalnu komponentu sile teže uravnotežuje napetost niti,

$F_{gN} = mg\cos\varphi$, a tangencijalna je komponenta sile teže usmjerena prema ravnotežnom položaju,

$F_t = -mg\sin\varphi$ i zbog nje će se materijalna točka njihati oko ravnotežnog položaja, titrat će amo-tamo. Općenito titranje matematičkog njihala nije harmonijsko. Samo za male kutove za koje je kut izražen u radijanima jednak sinusu kuta ($\varphi = \sin\varphi$), tj. za kutove manje od 5° ($\varphi < 5°$), matematičko njihalo harmonijski će titrati, pa će tada za njega vrijediti sve što smo do sada rekli za harmonijsko titranje.



Slika 9.6. Matematičko njihalo

$$F = -kx$$

$$F = F_{gt} = -mg\sin\varphi = -mg\varphi = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

$$F = -\frac{mg}{l}x$$

Vidimo da je sila proporcionalna elongaciji pri čemu je konstanta proporcionalnosti,

$$k = \frac{mg}{l}$$

Uvrštavanjem konstante u izraz za period harmonijskog titranja $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ dobijemo izraz za period matematičkog njihala,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Zaključujemo da period titranja matematičkog njihala (za mlade amplitude) ovisi o duljini njihala i akceleraciji sile teže (ne ovisi o masi). Pomoću ovog izraza može se vrlo precizno odrediti akceleracija sile teže g.

Materijalna točka tijekom titranja giba se po kružnom luku, pa na nju djeluje centripetalna sila koja je rezultanta napetosti niti i komponente sile teže u smjeru niti,

$$F_{cp} = F_N - mg\cos\varphi$$

Veličina centripetalne sile mijenja se tijekom titranja. Razmotrite to.

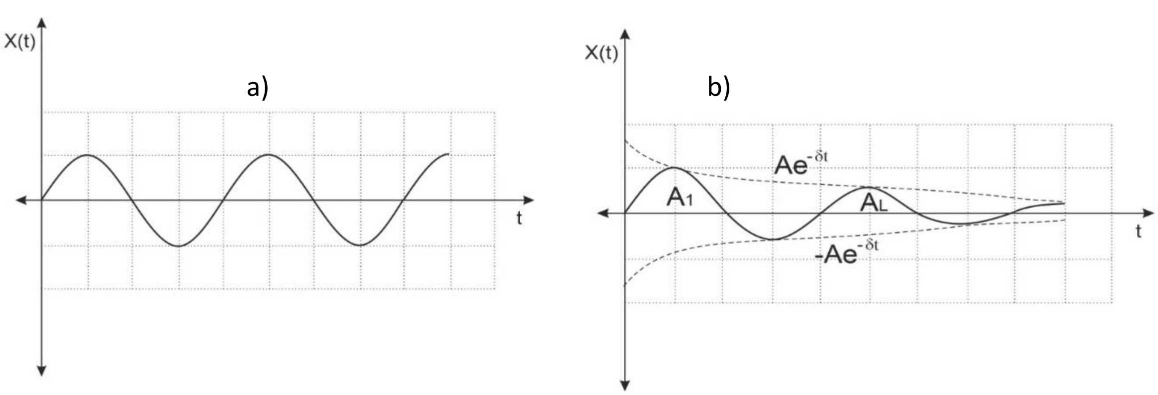
Kada se matematičko njihalo nalazi u nekom akceleriranom sustavu, npr. dizalu ili vozilu koje ubrzava ili usporava, period titranja možemo odrediti iz izraza,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_R}}$$

gdje je a_R rezultantna akceleracija koja za dizalo iznosi $a_R = g \pm a_d$, gdje je a_d akceleracija dizala, a u vozilu koje ubrzava ili usporava rezultantna akceleracija je $a_R = \sqrt{g^2 + a_v^2}$ gdje je a_v akceleracija vozila.

9.3. PRIGUŠENO TITRANJE

Proučavajući jednostavna titranja (titranje opruge, matematičko njihalo), pretpostavili smo da nema gubitaka energije zbog trenja i da je ukupna mehanička energija očuvana. Pri takvom titranju amplituda je konstantna (slika. 9.7 a). Ako postoje gubici energije, amplituda će se tijekom vremena smanjivati, a titranje će prestati. To **je prigušeno titranje** (slika 9.7.b). Kod prigušenog titranja energija se tijekom vremena smanjuje.



Slika 9.7. Neprigušeno (a) i prigušeno (b) titranje

Neka je sila trenja proporcionalna brzini $\vec{F}_{tr} = -k_1\vec{v} = -k_1\frac{d\vec{x}}{dt}$, gdje je k_1 konstanta trenja (otpora, gušenja), a predznak minus pokazuje da su sila trenja i brzina suprotnih orijentacija. Jednadžba gibanja za prigušeno titranje glasi

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{tr}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{tr}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kx - k_1\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k_1\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Neka je $\frac{k_1}{m} = 2\delta$ faktor prigušenja i $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ vlastita frekvencija neprigušenog titranja.

Rješenje ove homogene diferencijalne jednadžbe je:

$$x = Ae^{-\frac{k_1}{2m}t}\sin(\omega t + \varphi_0) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Zaključujemo da se amplituda titranja eksponencijalno smanjuje tijekom vremena.

Q-faktor. Omjer dviju susjednih amplituda koje se vremenski razlikuju za period T (npr. a_1 i a_2 na slici 9.7.b) uvijek je konstantan i iznosi

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = e^{\delta T}$$

Logaritam gornjeg omjera zove se **logaritamski dekrement titranja (λ)**

$$\lambda = \ln\frac{A_{n-1}}{A_n} = \delta T$$

Postoje slaba i jaka gušenja. Pri slabom gušenju vrijedi

$$\delta = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

gdje je n = 1, 2, 3, …broj amplitude. Kod slabog gušenja slijed amplituda čini geometrijski niz (amplitude su sve manje i manje tako da je to niz brojeva koji teže nuli).

Primjer 9.3.

Kod prigušenog titranja zadan je omjer $\frac{A_1}{A_2} = \frac{10}{9}$. Koliki je omjer $\frac{A_3}{A_4}$ i koliko će iznositi treća po redu amplituda A_3?

Rješenje

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} = ... = \frac{A_{n-1}}{A_n} = \delta = konst.$$

Dakle je, $\frac{A_3}{A_4} = \frac{10}{9}$

Pokažite da vrijedi $\frac{A_1}{A_n} = \delta^{n-1}$

Tada je $A_n = A_1\delta^{1-n}$ pa je $A_3 = A_1\delta^{-2} = 0{,}81A_1$

Kod jakog gušenja, dekrement je veći, pa se amplituda brže smanjuje, a period titranja postaje sve veći. U praksi veliku ulogu ima tzv. kritično gušenje jer mnogi instrumenti i uređaji moraju biti upravo tako izvedeni da zadovoljavaju uvjete kritičnog gušenja, tj. da se za što kraće vrijeme vrate u ravnotežni položaj.

Prigušenje možemo opisati i tzv. Q-faktorom (faktorom kvalitete ili „dobrote“) titrajnog sustava. Veza između logaritamskog dekrementa i faktora dobrote je

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega}{2\delta}$$

Što je faktor dobrote veći, prigušenje je manje (manji je gubitak energije iz titrajnog sustava).

Obično se Q-faktor definira omjerom srednje ukupne energije titrajnog sustava između dvije susjedne pozitivne amplitude (npr. a_1 i a_2 na slici 1.25.) i gubitka energije u tom intervalu:

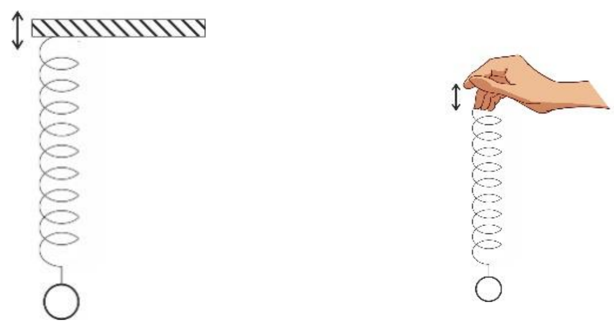
$$Q = 2\pi \frac{\overline{E}}{\Delta E}$$

Prisilno titranje i rezonancija

Titranje može biti prirodno ili slobodno i prisilno. Kod prirodnog titranja sustav se pomakne iz ravnotežnog položaja i pusti samostalno titrati. Ako nema gušenja, tj. ako nema gubitka energije pri čemu se potencijalna energija pretvara u kinetičku i obrnuto, sustav titra svojom prirodnom ili vlastitom frekvencijom ω_0.

Kod prisilnog titranja neki drugi uzbudni sustav daje prvom sustavu impulse sile koji se ponavljaju u stalnim vremenskim razmacima. Prvi sustav više ne titra vlastitom frekvencijom već dolazi do prisilnog titranja nekom drugom frekvencijom.

Prisilno titranje može se prikazati pomoću sustava koji se sastoji od tijela ovješenog na spiralnu oprugu i ruke koja izvodi prisilno titranje (slika 9.8.)



Slika 9.8. Prisilno titranje

Na tijelo mase m djeluju tri sile: harmonijska sila $F=-kx$, sila trenja $F_{tr}=-k_1\dot{x}=-k_1\frac{dx}{dt}$ i vanjska periodična sila $F_v=F_0\sin\omega t$, pa je jednadžba za takav prisilni harmonijski oscilator:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+k_1\frac{dx}{dt}=F_0\sin\omega t \qquad \text{ili}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=A_0\sin\omega t \qquad (1)$$

gdje je $\delta=\frac{k_1}{2m}$, $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ i $A_0=\frac{F_0}{m}$ (2)

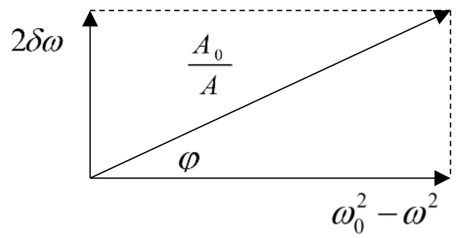
Pretpostavimo da je rješenje jednadžbe (1) oblika

$$x=A\sin(\omega t-\varphi) \qquad (3)$$

Uvrstimo li (3) u (1) dobivamo

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t - \varphi) + 2\delta\omega \sin(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{A_0}{A}\sin \omega t \quad (4)$$

Poslužimo se fazorskim prikazom titranja. Na lijevoj strani izraza (4) je zbroj dvaju međusobno okomitih titranja amplitude $\omega_0^2 - \omega^2$ i $2\delta\omega$, a na desnoj strani titranje amplitude $\frac{A_0}{A}$ koje je dobiveno njihovim zbrojem. Prikaz odgovarajućih rotirajućih vektora je na slici 9.9.



Slika 9.9. Uz izračunavanje amplitude prisilnog titranja.

Sa slike 9.9. vidljivo je da vrijedi:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{A_0}{\omega_0^2\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4\frac{\delta^2\omega^2}{\omega_0^4}}} \quad (5)$$

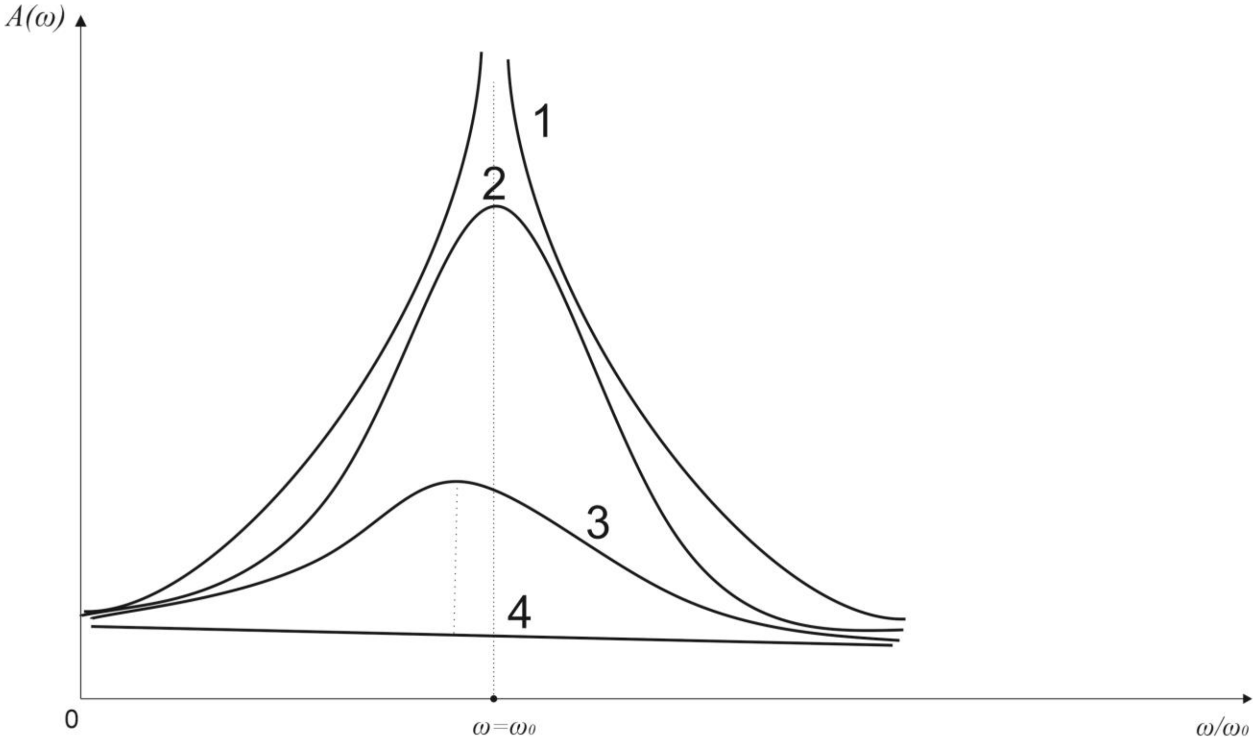
$$tg\varphi = \frac{2\sigma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\delta\frac{\omega}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (6)$$

Amplituda *A* ovisi o omjeru $\frac{\omega}{\omega_0}$ i prigušenju δ, a maksimum doseže pri rezonantnoj frekvenciji ω_r, koja se odredi izračunavanjem maksimuma funkcije *A* tako da se derivacija nazivnika (5) izjednači s nulom, pa se dobije:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (7)$$

U graničnom slučaju (ako nema trenja) vrijedi $\omega_r = \omega_0$, inače je rezonantna frekvencija malo manja od vlastite frekvencije i ta je razlika to manja, što je prigušenje manje. Pojava da oscilator prima iz okoline najviše energije naziva se **rezonancija.**

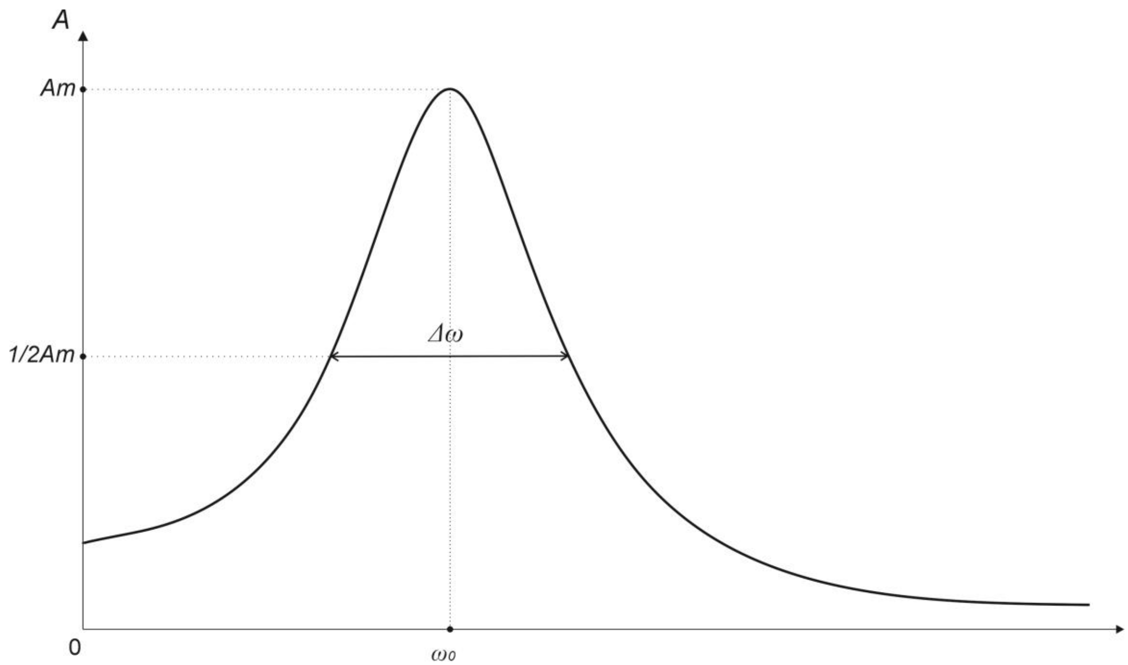
Na slici 9.10. prikazana je ovisnost amplitude o omjeru $\frac{\omega}{\omega_0}$. U idealnom slučaju kada ne bi bilo trenja, amplituda pri rezonanciji $\omega = \omega_0$ težila bi beskonačnosti. Međutim, u prirodi nema titranja bez gubitaka, pa je rezonantna amplituda uvijek konačna. Što je prigušenje veće, a Q-faktor manji, rezonantna je amplituda manja, a i rezonantna se frekvencija više razlikuje od vlastite.



Slika 9.10. Ovisnost amplitude pri prisilnom titranju o frekvenciji i prigušenju

Prisilno titranje može biti štetno i nastoji se izbjeći (kod strojnih dijelova, građevina (mostova), …) ali može biti i korisno (u mikrovalnoj pećnici, antena, …)

Rezonantne karakteristike danog titrajnog sustava to su bolje izražene što je rezonantna krivulja uža i viša. Ako se s $\Delta\omega$ označi širina rezonantne krivulje na polovici njezine visine (slika 9.11), možemo reći da je rezonancija to oštrija što je $\Delta\omega$ manji.



Slika 9.11. Rezonantna krivulja

Kao veličina koja karakterizira kvalitetu rezonancije, uvodi se Q-faktor ili faktor dobrote. On se za slučaj rezonancije definira omjerom:

$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, gdje je $\Delta\omega$ širina rezonantne krivulje na pola njezine visine, a ω_0 vlastita frekvencija oscilatora.

Može se pokazati da tako definirani Q-faktor u cijelosti odgovara Q-faktoru kod prigušenog titranja. Što je Q-faktor veći, rezonantne karakteristike su bolje.

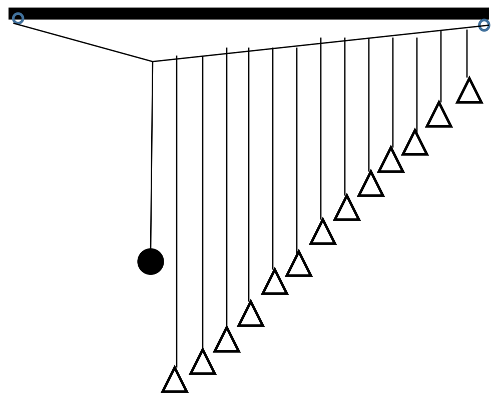
Niske vrijednosti faktora dobrote imaju jako gušeni oscilatori koji se umire vrlo brzo nakon prestanka djelovanja pobude (npr. amortizeri auta). Visoke vrijednosti Q-faktora pokazuju slabo gušenje i usku rezonantnu krivulju. To su oscilatori koji se ne pobuđuju ni na jednoj frekvenciji osim na rezonantnoj i nakon pobude dugo titraju. Primjer je žica gitare koja napravi oko 1000 titraja nakon pobude.

Jedan od udesa dogodio se 1938. godine u SAD-u u mjestu Tacoma kada je zbog umjereno jakog vjetra počeo rezonantno titrati novoizgrađeni viseći most i srušio se nakon nekoliko sati titranja.

Primjer 9.4.

Bartonovo njihalo (slika 9.12.) sastoji se od niza jednostavnih njihala vrlo malenih masa i različitih duljina, od 1 m do nekoliko centimetara. Vanjsku silu daje njihalo V (pobudni sustav), dugo oko

0,5 m i velike mase (olovna kuglica). Zanjišemo njihalo V. Titranje olovne kuglice prenosi se na ostala njihala preko žice na koju su obješena sva njihala. Kako će titrati ostala njihala? Hoće li među njima biti razlike u amplitudi titranja? (Stanje njihanja ne promatramo u prvom trenu, nego tek nakon nekog vremena, kada se uspostavi pravilno titranje svih njihala.)



Slika 9.12. Bartonovo njihalo

Rješenje:

Najjače će titrati ono njihalo koje je u rezonanciji s pobudnim sustavom. Budući da za njihalo vrijedi $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, u rezonanciji će biti ono njihalo koje je jednake (ili gotovo jednake) duljine kao i pobudno njihalo. Najmanja amplituda bit će, u ovom slučaju, najkraćeg njihala.

PITANJA I ZADACI

1. Navedite nekoliko primjera harmonijskog titranja.
2. O čemu ovisi period utega koji titra na opruzi? Ovisi li o amplitudi titranja?
3. Ukratko definirajte periodično gibanje, harmonijsko titranje, prigušeno titranje, prisilno titranje, rezonanciju.
4. Kolika je konstanta opruge dobivene serijskim spajanjem dviju opruga konstanti k_1 i k_2?
5. Hoće li se period utega povećati ili smanjiti ako, umjesto na jednoj, uteg titra obješen na dvije jednake, paralelno spojene opruge?
6. Uteg obješen na opruzi titra frekvencijom f. Kolika će biti frekvencija sustava ako oprugu prerežemo na dva jednaka dijela i uteg objesimo na jednu polovinu opruge?
7. Je li gibanje klipa u automobilskom motoru harmonijsko titranje?
8. Kako masa opruge utječe na period (frekvenciju) harmonijskog titranja?

9. Kako se mjerenjem može odrediti izraz za period titranja utega obješenog na oprugu?
10. Što je matematičko njihalo? O čemu ovisi period njihala?
11. Kako se promijeni period matematičkog njihala u liftu koji se diže akceleracijom *a*?
12. Izvedite izraz za kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju harmonijskog titranja i dokažite da za jednostavno titranje vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije.
13. Što je faktor prigušenja, logaritamski dekrement i faktor kvalitete (Q-faktor) titrajnog sustava?
14. Što je prisilno titranje? Kako nastaje rezonancija?
15. Neka čestica titra po zakonu $x = 5\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3})$. U kojem će trenutku čestica postići najveću elongaciju?
16. Period titranja čestice je 2 s. Kada će njezina elongacija biti jednaka polovici amplitude ako je početni fazni kut -30°?
17. Jednadžba titranja čestice je $x = 10cm\sin(\frac{\pi s^{-1}}{12}t + \frac{2\pi}{3})$. Odredite period titranja, maksimalnu brzinu i maksimalnu akceleraciju pri titranju ove čestice?
18. Kada se na oprugu objesi uteg mase 2 kg, tada sustav titra s periodom T_1. Za koliko manji uteg moramo objesiti da bi se period titranja smanjio četiri puta?
19. U staklenoj U cijevi promjera 2 cm nalazi se 1 kg žive. Malim povećanjem tlaka, za trenutak, u jednom kraku cijevi živa je započela titrati. Odredite period titranja žive.
20. Čestica mase 10 g titra frekvencijom 50 Hz. Odredite maksimalnu energiju titranja ako je amplituda titranja 2 cm.
21. Ako uteg mase 5 kg objesimo na oprugu, ona se produži za 49 cm.

a) Kolika je konstanta opruge?

b) Uteg izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo da titra. Koliki su period, frekvencija kružna frekvencija sustava, amplituda, iznos najvećeg ubrzanja?

c) Gdje se nalazi uteg i kolika mu je brzina i akceleracija 0,35 s nakon početka titranja? Kolikom silom opruga djeluje na uteg u tom trenutku? Nacrtajte ovisnost elongacije, brzine i akceleracije utega za $0 \le t \le 2T$.

10. VALOVI

Do sada smo proučavali ponašanje čestica, a sada slijedi proučavanje valnih svojstava. U klasičnoj fizici pojam vala i pojam čestice dva su suprotstavljena fizikalna pojma. Pri širenju vala, čestice sredstva ostaju na svojim mjestima i titraju oko ravnotežnog položaja, a širi se samo stanje titranja odnosno prenosi se energija izvora vala. Val je zapravo titranje koje se širi prostorom i time prenosi energiju, a čestica je nakupina tvari koja može prenositi energiju.

10.1.VRSTE VALOVA

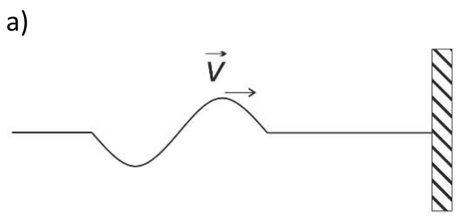
Val je poremećaj sredstva koji se određenom brzinom širi kroz prostor prenoseći energiju i informacije. Nikakva se tvar pritom ne prenosi kao u slučaju gibanja čestica. Valovi se dijele na mehaničke (morski valovi, valovi zvuka, seizmički valovi, …), elektromagnetske (radio i TV valovi, mikrovalovi, infracrveno zračenje, vidljiva svjetlost, ultraljubičasto zračenje, x-zračenje, gama zračenje, kozmičko zračenje) i valove materije (to su valovi povezani s elementarnim česticama kao što su elektron ili foton ili s osnovnim česticama od kojih je izgrađen tvarni svijet). Mehanički valovi šire se kroz elastična sredstva, a elektromagnetski se mogu širiti i u vakuumu.

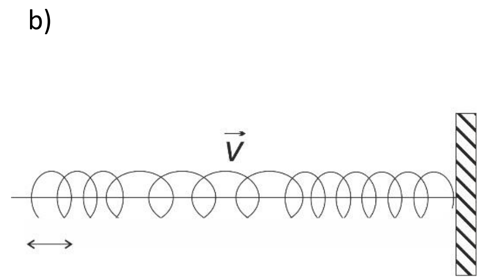
10.2 MEHANIČKI VALOVI

Valovi mogu biti transverzalni i longitudinalni. Mehanički valovi šire se kroz elastično sredstvo npr. uže ili žica ili gumena cijev. Ako jedan kraj horizontalno napetog užeta zatitramo rukom, kroz uže će se širiti val (slika 10.1.). Čestice sredstva titrat će okomito na smjer širenja vala. Valove pri kojima čestice sredstva titraju okomito na smjer širenja valova zovemo **transverzalni valovi.**

Ako jedan kraj napetog užeta pomaknemo gore-dolje, kroz uže će se širiti transverzalni poremećaj koji zovemo puls. Ako početak užeta nastavimo titrati, kroz uže će se širiti kontinuirani transverzalni val.

Ako nekoliko zavoja na početku opruge stisnemo, a zatim pustimo, zgušćenje zavoja brzo će se širiti prema drugom kraju opruge ili ako jedan kraj opruge spojimo s vibratorom koji harmonijski titra, titranje će se po opruzi širiti kao zgušnjavanje i razrjeđivanje zavoja opruge (slika 8.2.). To su **longitudinalni valovi**. Longitudinalni valovi su oni valovi u kojima čestice titraju u smjeru širenja vala.



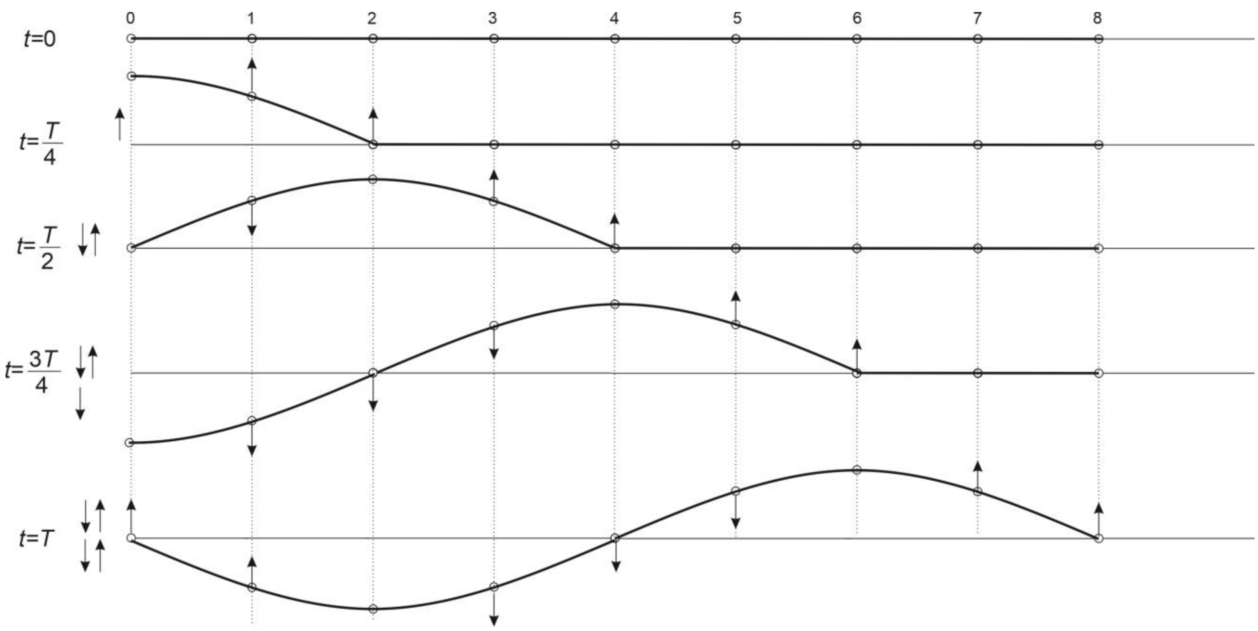


Slika 10.1. Transverzalni val na užetu (a)

Slika 10.2. Longitudinalni val na opruzi (b)

Valovi mogu biti progresivni i stojni. Progresivni val širi se i prenosi energiju s čestice na česticu. Kod stojnog vala neke čestice miruju, a neke stalno titraju. Stojnim se valom energija ne prenosi.

Valovi nastaju u izvoru vala, a titranje se širi određenom brzinom kroz sredstvo. Pritom kroz sredstvo ne putuju čestice, već samo poremećaj, pa moramo razlikovati brzinu titranja čestica oko ravnotežnog položaja od brzine širenja vala.



Slika 10.2. Shematski prikaz nastajanja i širenja valnog gibanja kroz uže

Dok čestica u izvoru vala napravi jedan potpuni titraj, val prevali određeni put koji zovemo **valna duljina** λ **.** To je udaljenost najbližih točaka koje titraju istom fazom.

Valovi se kroz sredstvo šire određenom brzinom. To je kvocijent puta koji prijeđe određena faza vala (npr. brijeg) i za to potrebnog vremena. Ta se brzina često zove i fazna brzina jer se njome širi određena faza vala. Budući da za vrijeme jednog titraja T val prijeđe jednu valnu duljinu λ **,** slijedi da je

$$v = \frac{\lambda}{T} \text{ ili}$$

$$v = \lambda f \qquad (10.1.)$$

(10.1.) je osnovna relacija za svako valno gibanje. Ona daje vezu između valne duljine, frekvencije i brzine vala. Zaključujemo da je brzina širenja vala jednaka produktu valne duljine i frekvencije.

Brzina širenja vala ovisi o osobinama sredstva kroz koje val prolazi (elastičnosti i gustoći). Kada val prelazi iz jednog sredstva u drugo, brzina i valna duljina mijenjaju se, a frekvencija ostaje nepromijenjena.

Razlika u fazi između titranja čestice udaljene od izvora vala za Δx i titranja čestice u izvoru vala je

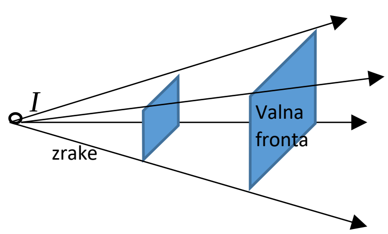
$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = kx = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

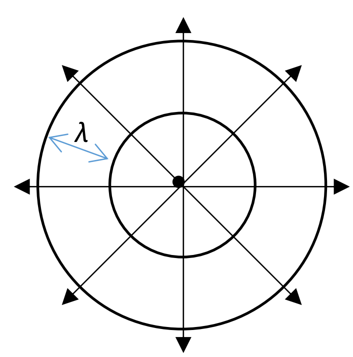
Veličina $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ naziva se **valni broj**. (Valni broj i konstanta opruge imaju istu oznaku k, međutim to su dvije različite veličine.)

Geometrijsko mjesto točaka do kojih dopire titranje u određenom trenutku zove se **valna fronta**. Sve su točke valne fronte u fazi.

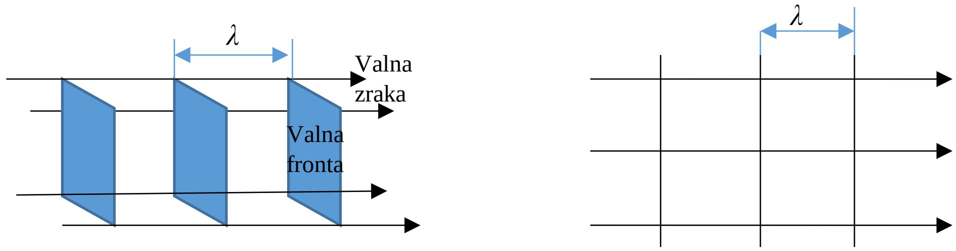
Pravce po kojima se titraji šire od čestice do čestice zovemo valna zraka. Zrake su okomite na valne fronte.

Najčešći su valovi u prirodi prostorni valovi i to kuglasti čije su valne fronte koncentrične kugline plohe, a zrake radijalni pravci (slika 10.3.) Valovi koji nastaju iz beskonačno dalekog izvora ravni su valovi čije su fronte ravnine, a zrake paralelni pravci (slika 10.4).





Slika 10.3. Kuglasti val



Slika 10.4. Ravni val

10.3. JEDNADŽBA HARMONIJSKOG VALA

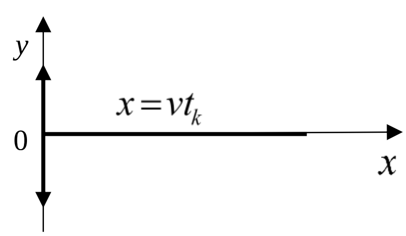
Neka izvor vala proizvodi harmonijsko titranje. Kako već znamo, jednadžba harmonijskog titranja je

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Pomak iz ravnotežnog položaja označili smo simbolom *y*, jer simbol *x* označava os duž koje se val širi. Neka je u samom izvoru vala $x = 0$, tj. $\varphi_0 = 0$, pa je jednadžba poremećaja u toj točki

$$y = A\sin\omega t$$

Kako je širenje vala u smjeru osi *x*, to će na nekoj udaljenosti osi *x* do koje se val već proširio titraji kasniti u fazi za titranjem izvora za vrijeme $t_k = \frac{x}{v}$, gdje je *v* brzina širenja vala (slika 10.5.)



Slika 10.5. Uz jednadžbu vala

Elongacija čestice koja se nakazi na nekoj udaljenosti x u bilo koje vrijeme t, zbog vremenske razlike t_k njezinog titranja prema titranju izvora je

$$y = A\sin\omega(t - t_k)$$

$$y = A\sin\omega(t - \frac{x}{v}) \qquad (8.2)$$

To je jednadžba vala kojom opisujemo titranje čestice sredstva na udaljenosti x od izvora.

Kako je $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ i $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ jednadžbu vala možemo pisati u različitim oblicima

$$y = A\sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{T}\frac{x}{v})$$

$$y = A\sin(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

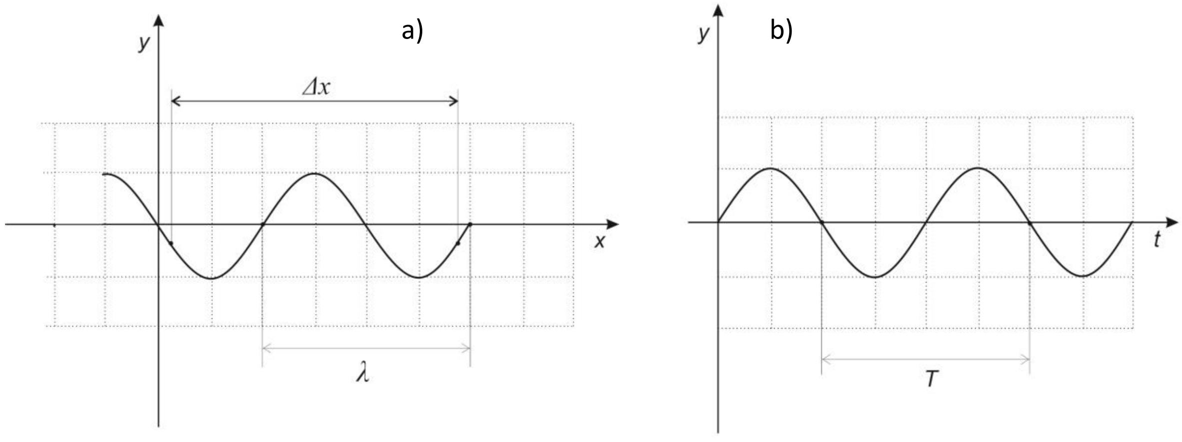
$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

$$y = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

$$y = A\sin 2\pi(ft - \frac{x}{\lambda})$$

Ako se val širi u pozitivnom smjeru osi x, u izrazima za val u zagradi stoji minus, a ako se val širi u negativnom smjeru osi x, u izrazima u zagradi stoji predznak plus.

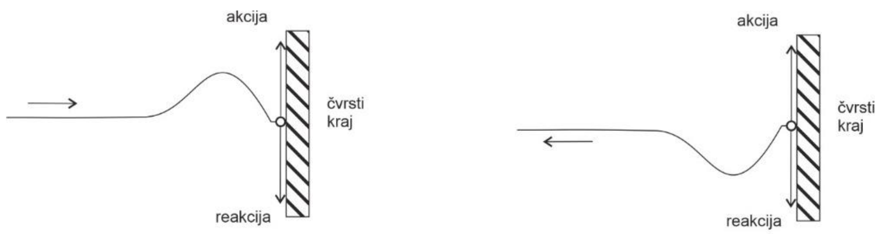
Jednadžba vala opisuje stanje harmonijskog titranja na bilo kojem mjestu x do kojeg je val već došao u trenutku t. Iz jednadžbe vala vidljivo je da elongacija y bilo koje čestice ovisi o položaju x i vremenu t (slika 10. 6)



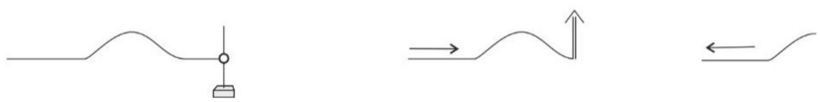
Slika 10.6. a) Ovisnost elongacije y o položaju x uz t = konst. ; b) Ovisnost elongacije y o vremenu uz $x = 0$

10.4. ODBIJANJE (REFLEKSIJA) VALOVA

Pri odbijanju vala na čvrstom kraju, val se odbija sa suprotnom fazom, tj. dol se odbija kao brijeg, a brijeg kao dol. Val dobije skok (pomak) u fazi za π (slika 10.7. a). Zadnja čestica djeluje elastičnom silom prema gore na učvršćeni kraj, a učvršćeni kraj djeluje na česticu silom prema dolje.



Slika 10.7. a) Refleksija na čvrstom i slobodnom kraju



Slika 10.7. b) Refleksija na slobodnom kraju

Ako je jednadžba upadnog vala koji napreduje u pozitivnom smjeru osi x prema čvrstom kraju $y = A\sin(\omega t - kx)$, tada je jednadžba odbijenog vala $y = A\sin(\omega t + kx + \pi)$.

Pri odbijanju vala od slobodnog kraja (slika 10.7.b), val se odbija s istom fazom, tj. brijeg se odbija kao brijeg, a dol kao dol. Ako je upadni val $y = A\sin(\omega t - kx)$, val se odbija bez promjene faze te je jednadžba odbijenog vala $y = A\sin(\omega t + kx)$.

Slična razmatranja vrijede i za longitudinalne valove. Primjerice, pri širenju longitudinalnog vala u cijevi kada se on odbija od zatvorenog kraja cijevi, val dobiva skok u fazi za π , a u slučaju kada je cijev otvorena val se odbija s istom fazom.

10.5. NAČELO SUPERPOZICIJE

Načelo superpozicije vrijedi za sve vrste valova, mehaničke i elektromagnetske.

Ako dva ili više valova stignu istovremeno do neke točke sredstva, rezultantno titranje u toj točki vektorski je zbroj pojedinih titranja. To je načelo superpozicije:

$y = y_1 + y_2$

Načelo vrijedi kada je veza između pomaka (elongacije) i povratne sile linearna $F = -ky$, a ne vrijedi kada je ta veza nelinearna npr. $F = -ky - by^2$.

Silu koja djeluje u toj točki prostora dobijemo kao zbroj sila:

$$F = F_1 + F_2$$

$$ky = ky_1 + ky_2$$

Elongacija čestice koja titra pod utjecajem takvih sila je

$$y = y_1 + y_2$$

Pri zbrajanju dvaju ili više valova nastaje interferencija. Promatrajmo dva jednaka vala (jednake amplitude, frekvencije i brzine) koji se šire u smjeru osi + *x*:

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Primjenjujući formulu za transformaciju $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ dobije se rezultantni val

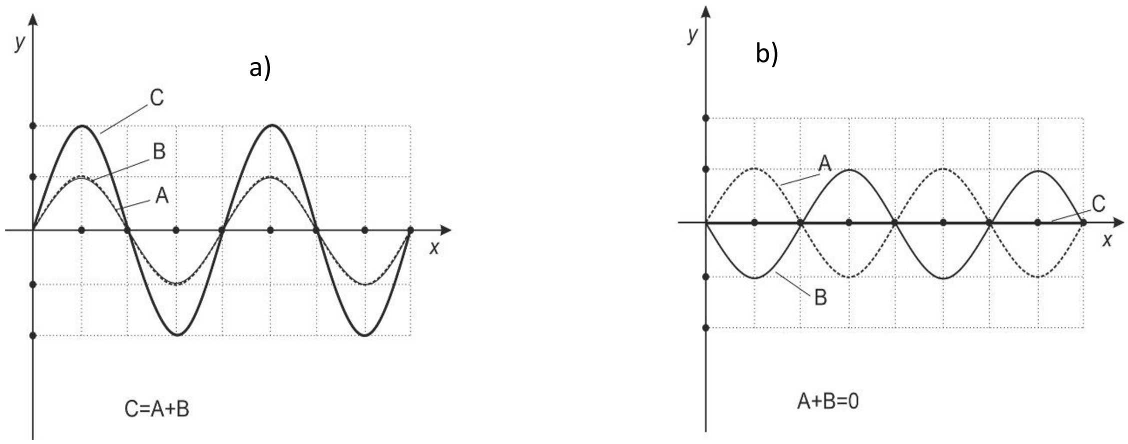
$$y = A\left[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \varphi)\right] = 2A\sin(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2})\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$y = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2})$$

Amplituda rezultantnog vala je $2A\cos\frac{\varphi}{2}$, a frekvencija i brzina ostale su nepromijenjene.

Promotrimo dva granična slučaja s obzirom na vrijednost pomaka u fazi.

Ako je $\varphi = 0$, $\cos\frac{\varphi}{2} = 1$, amplituda je 2A (maksimalna), tada su valovi y_1 i y_2 u fazi i nastaje konstruktivna interferencija (slika 10.8. a).



Slika 10.8. a) Konstruktivna interferencija, b) destruktivna interferencija

Ako je $\varphi = \pi,$ $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, amplituda je nula, nastaje destruktivna interferencija (slika 10. 8. b).

Možemo zaključiti da rezultat superpozicije dvaju valova ovisi o njihovoj razlici u fazi koju označujemo φ ili, još bolje, $\Delta\varphi$, odnosno o razlici u hodu, koju označujemo x, ili još bolje Δx.

a) Ako je razlika u fazi $\Delta\varphi = 2n\pi$, gdje n = 0,1,2,3,… ili razlika u hodu cijeli broj valnih $\Delta x = n\lambda$, n = 1,2,3,…dvaju jednakih valova, nastupa pojačavanje. Amplituda ukupnog vala je maksimalna i iznosi 2A. To je **konstruktivna interferencija**.

Interferencija valova koji su u fazi je **konstruktivna**.

b) Ako je razlika u fazi $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, n = 0,1,2,3,…ili ako je razlika u hodu jednaka neparnom broju polovina valne duljine $\Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$, gdje je n = 0,1,2,3,…dva jednaka vala, nastupa poništavanje. Amplituda ukupnog vala je nula. To je **destruktivna interferencija.**

Interferencija valova koji su u protufazi je **destruktivna.**

10.6. STOJNI VALOVI

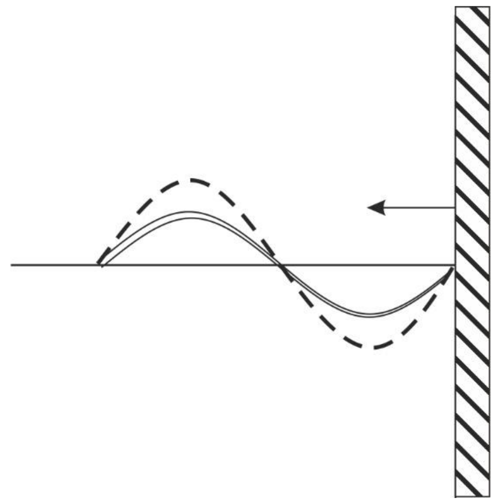
Stojni val nastaje interferencijom dvaju jednakih valova (jednake amplitude, jednake frekvencije, jednake valne duljine) koji se šire u suprotnom smjeru. Takva situacija može se dobiti na žici koja je na jednom kraju učvršćena (slika 10.9.) tako da interferiraju upadni i reflektirani val.

Neka je upadni progresivni val proizveden na žici

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$

Val se reflektira na čvrstom kraju, pa dobiva skok u fazi za π, pa je

$$y_2 = A\sin(\omega t + kx + \pi)$$



Slika 10.9. Uz izvod formule za stojni val

Primjenom načela superpozicije dobivamo rezultantnu elongaciju tj. jednadžbu stojnog vala

$$y = y_1 + y_2 = A\sin(\omega t - kx) + A\sin(\omega t + kx + \pi)$$

$$y = 2A\sin kx \cos\omega t = 2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$$

Iz jednadžbe stojnog vala vidljivo je da postoje mjesta na žici koja stalno miruju. To su **čvorovi** stojnog vala. Oni nastaju gdje je amplituda $2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$, tj. gdje je

$\sin\frac{2\pi}{\lambda}x_n = 0$, Sinus funkcije je nula kada je kut nula ili $n\pi$, pa je $\frac{2\pi}{\lambda}x_n = n\pi$

$$x_n = \frac{n\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3,\ldots$$

Mjesta na žici koja najjače titraju zovu se **trbusi** stojnog vala. Trbuhe ćemo dobiti za maksimalnu amplitudu, tj. na mjestima gdje sinusna funkcija ima ekstremne vrijednosti ± 1. To je ostvareno za $\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1$ odnosno za $\frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ Uvjet za pojavljivanje trbuha je

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0, 1, 2, 3,\ldots$$

Dakle, neka mjesta na žici stalno miruju (čvorovi), a neka stalno maksimalno titraju (trbusi). Žica titra tako da joj je oblik stalan. Udaljenost između dva susjedna čvora ili dva susjedna trbuha je $\frac{\lambda}{2}$.

10.7. USPOREDBA PROGRESIVNOG I STOJNOG VALA

Napišimo jednadžbe progresivnog i stojnog vala, pa ih usporedimo

Progresivni val $\quad y = A\sin(\omega t - kx)$

Stojni val $\quad y = 2A\sin kx \cos \omega t$

Provedite za vježbu usporedbu progresivnog i stojnog vala.

10.8. TRANSVERZALNI STOJNI VAL NA NAPETOJ ŽICI

Zatitramo li napetu žicu duljine *l* učvršćenu na oba kraja (slika 10.10.), na njoj se mogu formirati stojni valovi samo određene, diskretne, valne duljine: $l = \frac{\lambda}{2}$, $l = \frac{2\lambda}{2}$, $l = \frac{3\lambda}{2}$,…

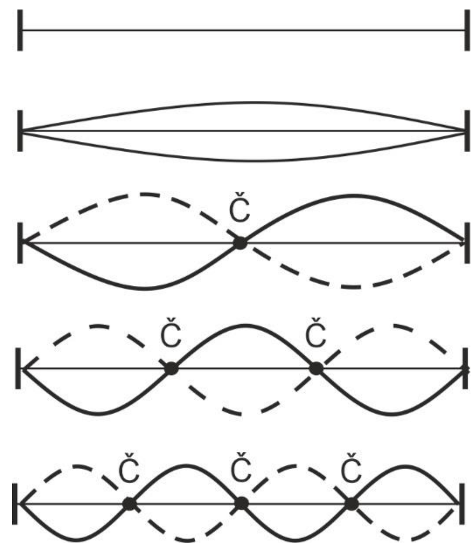
Općenito $\quad l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \rightarrow \lambda_n = \frac{2l}{n}$

Na ovaj način pojavila se kvantizacija u klasičnoj fizici. Kažemo da su valne duljine kvantizirane. Frekvencije kojima titra napeta žica tj. vlastite frekvencije određene su brzinom širenja vala $v = \lambda_n f_n$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\frac{2l}{n}} = n\frac{v}{2l}$$

Za $n = 1$ nastaje osnovni (fundamentalni) stojni val ili prvi harmonik, najveće valne duljine $\lambda_{\max} = 2l$, a najniže frekvencije $f_{\min} = \frac{v}{\lambda_{\max}} = \frac{v}{2l}$. Ako izvor titra i s višim frekvencijama koje su višekratnici osnovne frekvencije, nastaju viši harmonici. Ako osnovnu, najnižu frekvenciju označimo f_1, onda će frekvencije viših harmonika biti $2f_1, 3f_1, 4f_1, \ldots$ koje nazivamo drugi, treći, četvrti … harmonik. Općenito je

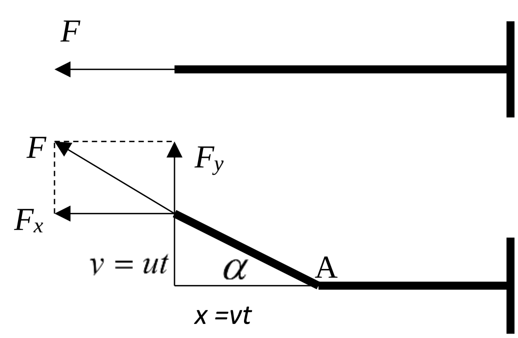
$$f_n = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \qquad f_1 = \frac{v}{2l} \qquad f_n = n\frac{v}{2l}$$



Slika 10.10. Stojni val na žici učvršćenoj na oba kraja

10.9. BRZINA ŠIRENJA TRANSVERZALNIH VALOVA U NAPETOJ ŽICI

Mehanički transverzalni val može se širiti samo kroz čvrsta tijela, dok se longitudinalni val može širiti kroz sva agregatna stanja.



Slika 10.11. Uz izvod brzine širenja transverzalnog vala

Žica je zategnuta silom F. Na lijevom kraju dajmo žici mali poprečni poremećaj prema gore brzinom u te se žica za vrijeme t pomakne za $y = ut$. Poremećaj će se širiti žicom brzinom v i nakon vremena t doći do točke A, prevalivši put $x = vt$.

Primijenimo zakon o jednakosti impulsa i količine gibanja, $I = \Delta p$.

Iz slike 8.10. vidljivo je da je $\sin\alpha = \frac{F_y}{F}$ i $tg\alpha = \frac{y}{x}$. Za male kutove vrijedi da je $\sin\alpha \approx tg\alpha$, pa je $\frac{F_y}{F} = \frac{y}{x} = \frac{ut}{vt}$ odnosno $F_y = F\frac{u}{v}$. Impuls sile F_y za vrijeme t bit će $I = F\frac{u}{v}t$. Promjena količine gibanja žice za to vrijeme jednaka je produktu mase lijevog dijela žice do točke A i brine u kojom se čestice tog dijela žice poprečno gibaju, tj. vrijedi: $\Delta p = p_2 - p_1 = p_2$ je je $p_1 = 0$, te je $\Delta p = p_2 = mu = \mu vtu$.

Kako je $I = \Delta p$, to je:

$$F\frac{u}{v}t = \mu vtu \quad \text{odnosno}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

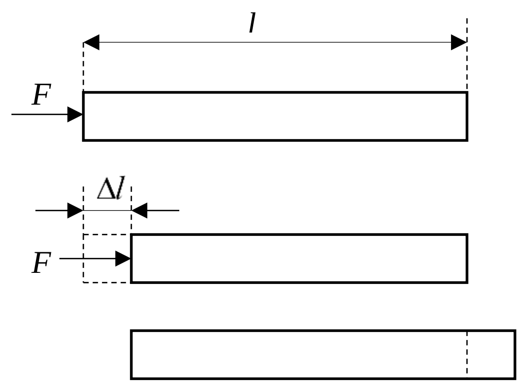
$\mu = \frac{m}{l}$ je linearna gustoća žice.

Zaključujemo da brzina širenja transverzalnog vala na napetoj žici ovisi samo o napetosti žice i linearnoj gustoći.

10.10. BRZINA ŠIRENJA LONGITUDINALNIH VALOVA

Kako smo već rekli, longitudinalni val može se širiti kroz sva agregatna stanja.

Brzna širenja longitudinalnog vala kroz čvrsta tijela



Slika 10.12. Brzina širenja longitudinalnog vala u štapu

Promatrajmo širenje longitudinalnog poremećaja na štapu duljine l i presjeka S, izrađenog od elastičnog materijala gustoće ρ. Udarimo li čekićem lijevi kraj štapa, nastat će longitudinalna deformacija Δl koja se u vremenu Δt širi brzinom u. Za isto vrijeme Δt prenosi se puls štapom do njegova kraja, na udaljenost l brzinom v. Primjenom Hookeova zakona dobivamo

$$F = ES\frac{\Delta l}{l} = ES\frac{u}{v}$$

gdje je F tlačna sila koja je izazvala deformaciju, a E je Youngov modul elastičnosti štapa.

Primjenom zakona o jednakosti impulsa sile i količine gibanja izračunajmo brzinu širenja pulsa (vala):

$$I = \Delta p$$

Štap je u početku mirovao, a zbog udarca se pomaknuo brzinom $u = \frac{\Delta l}{\Delta t}$, pa je promjena količine gibanja $\Delta p = mu = \rho Slu = \rho Svu\Delta t$. Kako je $I = F\Delta t$ slijedi:

$$F\Delta t = mu$$

$$ES\frac{u}{v}\Delta t = \rho Svu\Delta t$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Širenje longitudinalnih valova kroz fluide

Dio fizike koji proučava zvuk zove se akustika. Zvuk je pojava koju zamjećujemo uhom. To je longitudinalni mehanički val koji se može širiti u čvrstim tijelima, tekućinama i plinovima. Zvuk se ne može širiti vakuumom. Dakle, za širenje zvuka potrebno je sredstvo. Normalno ljudsko uho može registrirati zvukove frekvencije od 20 Hz do 20 kHz. Zvučne valove niže frekvencije od 20 Hz zovemo infrazvuk, a zvuk frekvencije iznad 20 kHz zove se ultrazvuk. Infrazvuk i ultrazvuk čovjek ne čuje.

Infrazvučni valovi nastaju npr. pri potresu, a ultrazvuk se može dobiti elastičnim titrajima u kristalima. Zvučne valove možemo proizvesti raznim glazbenim instrumentima, zvučnicima, govorom itd. Primjerice zvuk klavira ili violine nastaje titranjem žice čiji se poremećaji šire kroz žicu u obliku zgušnjenja i razrjeđenja. Otvorimo li naglo vrata učionice, zavjese na prozorima pomaknu se prema van jer se tlak zraka u sobi naglo povećao, odnosno čestice zraka zgusnule su se. Pri zatvaranju vrata, tlak zraka u učionici se smanji, odnosno čestice zraka se razrijede i zavjesa se pomakne u sobu. Glazbena viljuška titra slično titranju vrata, samo su amplitude titranja dosta manje, a frekvencije titranja znatno veće.

Udarimo li membranu bubnja, membrana bubnja titra i uz svoju površinu primorava na titranje i čestice zraka, što dovodi do promjene tlaka duž sredstva. Prestanemo li udarati membranu, ubrzo prestaje i titranje čestica zraka. Može se pokazati da su promjena tlaka Δp i brzina titranja čestica u povezane izrazom:

$$\Delta p = \rho v u$$

gdje je Δp promjena akustičkog tlaka, ρ gustoća medija, v brzina prostiranja zvuka, u brzina titranja čestica koje sudjeluju u širenju zvuka.

Najveća promjena akustičkog tlaka Δp_m (amplituda) je:

$$\Delta p_m = \rho v u_m = \rho v \omega A$$

Brzina zvuka ovisi o svojstvima sredstva kojim se širi, a računa se po formulama za brzinu longitudinalnog vala koje smo ranije izveli:

U čvrstim tijelima $\quad v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

U plinovima $\quad v = \sqrt{\dfrac{\kappa p}{\rho}} \qquad v = \sqrt{\dfrac{\kappa R T}{M}}$

U zraku $\quad v = 332\sqrt{1 + \dfrac{t}{273}} \qquad v$ = 332 m s^{-1} + 0,62 m s^{-1} °C^{-1} · t

U tekućinama $\quad v = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$

gdje je $\kappa = \dfrac{c_p}{c_v}$ adijabatska konstanta, a c_p specifični toplinski kapacitet fluida pri stalnom tlaku, c_v specifični toplinski kapacitet fluida pri stalnom volumenu, $\kappa = 1{,}67$ za jednoatomne plinove, $\kappa = 1{,}4$ za dvoatomne plinove (npr. zrak), $\kappa = 1{,}33$ za višeatomne, R = 8,314 J mol^{-1} K^{-1} plinska konstanta, T apsolutna temperatura, M molarna masa plina, B volumni modul elastičnosti.

Primjer 10.1.

Izračunati brzinu zvuka u zraku pri normiranim uvjetima.

t = 0 °C

p = 1,013·10^5 Pa

ρ = 1,293·10^{-3} kg m^{-3}

κ = 1,402

M = 28,84·10^{-3} kg mol^{-1}

v = ?

Moramo se koristiti formulom: $v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$

$$v = \sqrt{\frac{1{,}402 \cdot 8{,}314 \cdot 273}{28{,}84 \cdot 10^{-3}}} = 332 \text{ m s}^{-1}$$

v = 332 m s^{-1} + 0,62 m s^{-1} °C^{-1} · t

Brzina zvuka u vodi je 1500 m s^{-1}, a u čeliku 5000 m s^{-1} što je četiri puta više nego u zraku.

Zvuk pokazuje valne pojave refleksije (jeka) i refrakcije na granici dvaju sredstava različite gustoće pri čemu dolazi do promjene brzine i valne duljine (frekvencija ostaje nepromijenjena).

10.11. ZVUK KAO VARIJACIJA TLAKA OKO NEKE SREDNJE VRIJEDNOSTI

Umjesto da se val zvuka opisuje gibanjem čestica naprijed-nazad u nekom sredstvu, zvuk se može opisati promjenom tlaka oko neke srednje vrijednosti (npr. atmosferskog tlaka p_0).

Ravni val zvuka koji se širi u pozitivnom smjeru osi x brzinom v opisan je jednadžbom:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Ova jednadžba opisuje promjenu elongacije čestica plina u vremenu u određenoj točki prostora. Promjene tlaka koje nastaju širenjem zvučnog vala kroz plin, odnosno oscilacije tlaka oko ravnotežnog tlaka p_0 opisujemo jednadžbom:

$$p = p_0 + \rho v \omega A \cos(\omega t - kx)$$

Ako se elongacija čestice y mijenja po zakonu sinusa, tlak se mijenja po zakonu kosinusa i obratno tj. kada je elongacija maksimalna, tlak je nula i obrnuto. Maksimalna promjena (amplituda) tlaka je:

$$\Delta p_m = \rho v \omega A$$

Promjena tlaka jednodimenzionalnoga ravnog zvučnog vala dana je jednadžbom:

$$\Delta p = \Delta p_m \cos(\omega t - kx)$$

Primjer 10.2.

Napisati jednadžbu za promjenu tlaka zvučnog vala frekvencije 440 Hz (ton A u glazbenoj ljestvici) pri temperaturi 20 °C ako je amplituda promjene tlaka $5 \cdot 10^3$ Pa.

Rješenje

f = 440 Hz

t = 20 °C

$\underline{\Delta p_m = 5 \cdot 10^3 \text{ Pa}}$

Δp = ?

$$\Delta p = \Delta p_m \cos(\omega t - kx)$$

$$\Delta p = \Delta p_m \cos(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

v = 332 m s^{-1} + 0,62 m s^{-1} °C $\cdot$ t

v = 344 m s^{-1}

λ = 0,78 m

$$\Delta p = 5 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cos(2\pi \cdot 440 \text{ s}^{-1} t - \frac{2\pi}{0{,}78} \text{m}^{-1} x)$$

10.12. JAKOST (INTENZITET) ZVUKA

Općenito je jakost snaga po površini:

$$I = \frac{P}{S} \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Jedinica za jakost je W m^{-2}.

Jakost zvučnog vala je energija koju zvučni val prenese u jedinici vremena kroz jediničnu površinu okomito na smjer širenja zvuka:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{t \cdot S}$$

Dok se val širi kroz sredstvo, on prenosi energiju u smjeru svog širenja. Energija zvučnih valova vrlo je mala. Primjerice, energija koju stvara 10^6 ljudi u razgovoru odgovara energiji uobičajene baterijske svjetiljke.

Intenzitet je povezan s amplitudom titranja čestica A koje sudjeluju u širenju zvuka te je za harmonijski ravni val:

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v = \frac{1}{2}\rho(2\pi f)^2 A^2 v$$

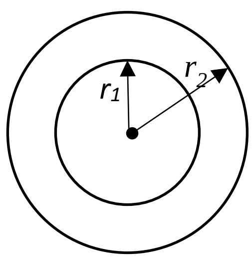
Intenzitet ravnog vala ne ovisi o udaljenosti.

Intenzitet zvučnog vala možemo pisati i u obliku:

$$I = \frac{1}{2}\frac{(\Delta p_m)^2}{\rho v}$$

Primjerice, za zvučni val frekvencije f = 1000 Hz na pragu čujnosti, amplituda pomaka čestica zraka iznosi oko 10^{-11} m, a amplituda promjena tlaka oko $2 \cdot 10^{-5}$ Pa. Pri najjačem zvučnom valu na granici boli, pomak čestica je oko 10^{-5} m, a amplituda tlaka oko 30 Pa.

Odredimo jakost zvuka koji nastaje iz točkastog izvora.



Slika 10.13. Ovisnost jakosti zvuka o udaljenosti

Pretpostavimo da izvor emitira stalnu snagu P u okolinu. Na udaljenosti r_1 od izvora, emitirana energija rasporedi se po sferi površine $S_1 = 4r_1^2\pi$, pa je jakost:

$$I_1 = \frac{P}{S_1} = \frac{P}{4r_1^2\pi}$$

Na nekoj većoj udaljenosti r_2 jakost će biti:

$$I_2 = \frac{P}{4r_2^2\pi}$$

Omjer jakosti je:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

Vidimo da se jakosti odnose obrnuto kao kvadrati udaljenosti.

U prirodi susrećemo različite zvukove, od onih na pragu čujnosti čija je jakost $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}, do onih koji uzrokuju bol, ali još ne oštećuje uho, jakosti oko I = 10 W m^{-2}. Omjer ovih intenziteta je:

$$\frac{I}{I_0} = 10^{13}$$

Tako veliki raspon jakosti praktičnije je iskazati logaritmom omjera jakosti nego samim omjerima jakosti, a uz to, osjet jakosti zvuka raste približno logaritamski (slika 10.14.). Zato se uvodi pojam **razina jakosti zvuka (*L*),** a za jakost I iznosi:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

gdje je L razina jakosti zvuka izražena u decibelima (dB), I jakost zvuka čiju razinu računamo, I_0 jakost zvuka na pragu čujnosti (I_0 = 10^{-12} W m^{-2}).

Mjerna jedinica za razinu jakosti zvuka je **decibel (dB).**

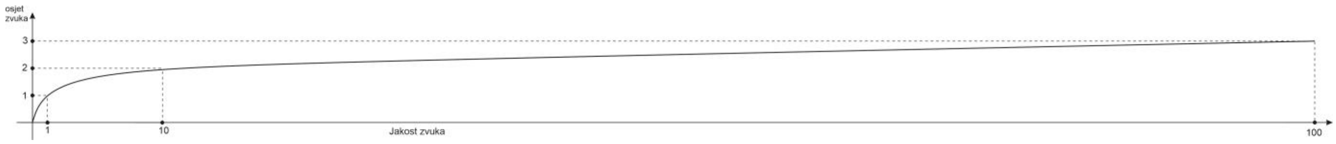
Glasnoća zvuka je osjet jakosti zvuka u našem uhu. Jedinica za razinu glasnoće zvuka je **fon.**

Zvukovi iste jakosti, a različite frekvencije čine se uhu različito glasnim. Za određivanje razine glasnoće, potrebno je nepoznate glasnoće usporediti s referentnim zvukom, a to je zvuk frekvencije 1000 Hz.

Razinu jakosti zvuka možemo računati i pomoću amplitude promjene tlaka:

$$L = 20 \log \frac{\Delta p_m}{\Delta p_{m0}}$$

gdje Δp_{m0} = 2·10^{-5} Pa, minimalna amplituda promjene tlaka koju bubnjić može detektirati.



Slika 10.14. Osjet zvuka raste približno logaritamski za linearni porast jakosti zvuka

Primjer 10.3.

Odredite raznu jakosti zvuka na pragu čujnosti i zvuka koji uzrokuje bol, ali još ne oštećuje uho.

Rješenje

$I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

I = 10 W m^{-2}

L_0 = ?

L = ?

$$L_0 = 10 \log \frac{I}{I_0} = 0 \text{ dB}$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10}{10^{-12}} = 130 \text{ dB}$$

Zvuk na pragu čujnosti ima razinu 0 dB, a zvuk koji počinje uzrokovati bol ima razinu oko 130 dB.

Primjer 10.4.

Razina jakosti zvuka na udaljenosti 200 m od nadzvučnog zrakoplova je 130 dB. Kolika je razina jakosti na udaljenosti 2 km od zrakoplova?

Rješenje

r_1 = 200 m

L_1 = 130 dB

r_2 = 2 km

$I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

L_2 = ?

$$L_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$130 = 10\log\frac{I_1}{I_0}$$

$$\log 10^{13} = \log\frac{I_1}{I_0}$$

$$10^{13} = \frac{I_1}{I_0}$$

$I_1 = I_0 \cdot 10^{13}$

$I_1 = 10$ W m^{-2} $\quad I_2 = I_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad$ $I_2 = 0{,}1$ W m$^{-2\log}$

$L_2 = 10\log\frac{I_2}{I_0}$ $\quad$ $L_2 = 110$ dB

Primjer 10.5.

Izračunajte razinu jakosti zvuka, amplitudu titranja, amplitudu promjene tlaka zraka, maksimalnu brzinu titranja čestica zraka i amplitudu akceleracije čestica zraka pri normiranim uvjetima za zvuk jakosti 1 W m^{-2} i za frekvenciju 1 kHz.

Rješenje

$I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}

$I = 1$ W m^{-2}

$f = 1000$ Hz

$t = 0$ °C, $p_0 = 101325$ Pa, $\rho_0 = 1{,}293$ kg m^{-3}, $v = 331$ m s^{-1}

$L, A, \Delta p_m, a_0 = ?$

$$L = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{1Wm^{-2}}{10^{-12}Wm^{-2}} = 120 \text{ dB}$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2I}{\rho\omega^2 v}} = \sqrt{\frac{2I}{\rho(2\pi f)^2 v}} = 1{,}09\cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{(\Delta p_m)^2}{\rho v} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta p_m = \sqrt{2I\rho v} = 29{,}3\ \text{Pa}$$

$$v_0 = \omega A = 2\pi f A = 6{,}85\cdot 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}$$

$$a_0 = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A = 430\ \text{m s}^{-2}$$

Primjer 10.6.

Dva tona razlikuju se u razini za 30 dB. Koliki je omjer njihovih jakosti?

Rješenje

$$\Delta L = L_2 - L_1 = 10\log\frac{I_2}{I_0} - 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10\log\frac{\frac{I_2}{I_0}}{\frac{I_1}{I_0}} = 10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$\Delta L = 10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$30 = 10\log\frac{I_2}{I}$$

$$\log\frac{I_2}{I_1} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{I_2}{I_1} = 10^3$$

Primjer 10.7.

Sirena daje zvuk razine jakosti 30 dB. Koliku razinu zvuka daje pet takvih sirena?

Rješenje

L_1 =30 dB

$\underline{I_2 = 5I_1}$

L_5 = ?

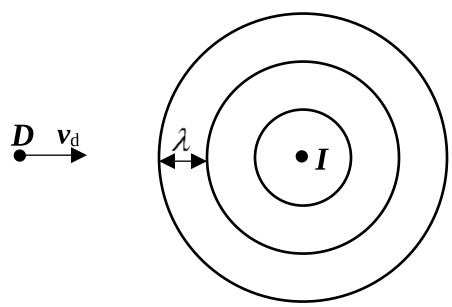
$$\Delta L = 10\log\frac{I_2}{I_1} = 10\log 5 = 7 \text{ dB}$$

$$L_5 = L_1 + \Delta L = 30 \text{ dB} + 7 \text{ dB} = 37 \text{ dB}$$

10.13. DOPPLEROV UČINAK

Pojava promjene frekvencije izvora zvuka pri relativnom gibanju izvora zvuka i detektora naziva se **Dopplerov učinak (efekt).** Dopplerov učinak javlja se i kod drugih valova. Mi ćemo promotriti tri posebna slučaja i to kada je brzina izvora manja od brzine zvuka:

a) Izvor miruje, a detektor se giba



Slika 10.14. Izvor zvuka miruje, a detektor se giba brzinom v_d

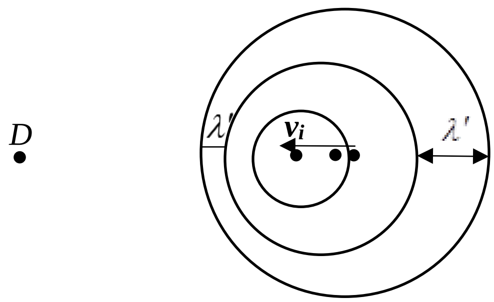
Neka izvor koji miruje emitira zvuk frekvencije f, tada će detektor koji se giba brzinom v_d u odnosu na mirni izvor primati frekvenciju f_d. Relativna brzina zvuka koji emitira izvor bit će $v' = v \pm v_d$ gdje je znak + za približavanje, znak – za udaljavanje. Frekvencija f_d koju detektor prima je:

$$f_d = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v \pm v_d}{\lambda} = \frac{v \pm v_d}{\frac{v}{f}} = f\,\frac{v \pm v_d}{v}$$

$$f_d = f\,\frac{v \pm v_d}{v}$$

gdje je v brzina zvuka koja ovisi o temperaturi.

b) Izvor zvuka se giba, a detektor miruje



Slika 10. 15. Detektor miruje, a izvor zvuka se giba

Kada se izvor zvuka giba, tada valne kugline plohe zvuka nisu više koncentrične, pa je frekvencija koju prima detektor različita od one frekvencije f koju izvor emitira. Valna duljina u smjeru gibanja izvora skrati se ako se izvor približava detektoru ili produlji ako se izvor udaljava, za pomak izvora u jednom periodu:

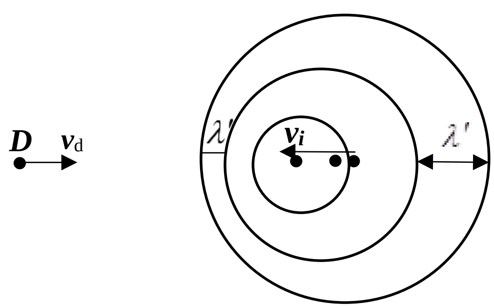
$$\lambda' = \lambda \mp v_i T = \frac{v}{f} \mp \frac{v_i}{f}$$

$$\frac{v}{f_d} = \frac{v}{f} \mp \frac{v_i}{f}$$

$$f_d = f \frac{v}{v \mp v_i}$$

gdje je znak – za približavanje, a znak + za udaljavanje izvora od detektora.

c) Izvor zvuka i detektor se gibaju



Slika 10.16. Izvor zvuka i detektor se gibaju

Frekvenciju koju prima detektor računamo po izrazu:

$$f_d = f\,\frac{v \pm v_d}{v \mp v_i}$$

U ovom su izrazu sadržana oba prethodna slučaja pri čemu smo pretpostavili da se izvor i detektor gibaju po pravcu koji ih spaja.

Razlika između frekvencije zvuka iz izvora f i frekvencije koju prima detektor f_d zove se **Dopplerov pomak za frekvencije,** a razlika valnih duljina zove se **Dopplerov pomak za valne duljine.**

Primjer 10.8.

Frekvencija zvižduka lokomotive je 1000 Hz. Koju frekvenciju čuje čovjek koji stoji pokraj pruge od kojeg se vlak udaljava brzinom 126 km h^{-1}? Temperatura zraka je 20 °C.

Rješenje

f = 1000 Hz

v_i = 126 km h^{-1} = 35 m s^{-1}

<u>t = 20 °C</u>

f_d = ?

Izračunajmo brzinu zvuka pri 20 °C:

v = 332 m s^{-1} + 0,62 m s^{-1} $°C^{-1}$ · t

v = 332 m s^{-1} + 0,62 m s^{-1} $°C^{-1}$ · 20 °C

v = 344,4 m s^{-1}

Koristimo izraz za slučaj kada se izvor zvuka giba, a detektor miruje:

$$f_d = f\,\frac{v}{v \mp v_i}$$

Kako se vlak udaljava vrijedi:

$$f_d = f\,\frac{v}{v + v_i}$$

f_d = 905,25 Hz

10.14. UDARI ZVUKA

Udari zvuka nastaju interferencijom dvaju harmonijskih zvučnih valova jednakih amplituda, a različitih (ali bliskih) frekvencija, što znači i različitih valnih duljina:

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t - k_1 x) \qquad y_2 = A\sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Općenito, rezultat interferencije ovisi o vremenu *t* i mjestu u prostoru *x*. Ograničimo se na situaciju kada je detektor učvršćen na jednom mjestu. Tada članovi argumenta sinusne funkcije k_1x i k_2x ne ovise o vremenu, pa ne utječu na vremensku ovisnost interferentne slike. Problem se svodi na interferenciju dvaju harmonijskih oscilatora na istom mjestu:

$$y_1 = A\sin\omega_1 t \qquad y_2 = A\sin\omega_2 t$$

Rezultat interferencije je tada:

$$y = y_1 + y_2 = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t$$

$$y = A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A\left[\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right]$$

$$y = 2A\cos\frac{2\pi t(f_1 - f_2)}{2}\cdot\sin\frac{2\pi t(f_1+f_2)}{2}$$

Promatrajmo ovaj rezultat za slučaj kada su frekvencije f_1 i f_2 vrlo bliske, tj $f_1 \approx f_2$, tada je $\frac{f_1+f_2}{2} = f$ a razlika frekvencija $f_1 - f_2 = f_u$ definira se kao **frekvencija udara.**

Rezultirajuću jednadžbu napišimo u obliku:

$$y = (2A\cos 2\pi\frac{f_u}{2}t)\sin 2\pi f t$$

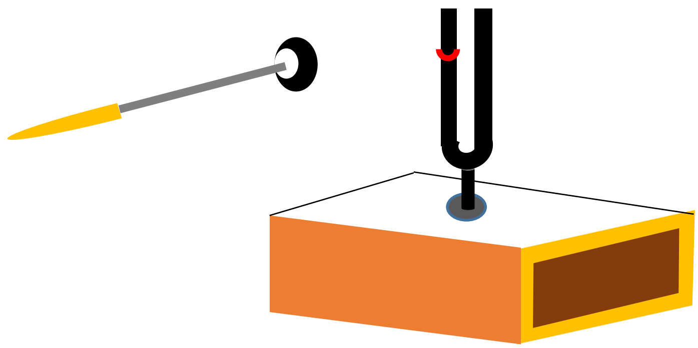
Faktor $\sin 2\pi f t$ predstavlja normalno titranje, a izraz u zagradi $(2A\cos 2\pi\frac{f_u}{2}t)$ je amplituda tog titranja koja nije stalna, već se periodički mijenja tijekom vremena od 0 do 2*A*. Kažemo da se radi o moduliranom titranju. Frekvencija udara je frekvencija pojavljivanja maksimalne amplitude. Frekvencija udara jednaka je razlici frekvencija harmonijskih oscilatora (izvora zvuka, glazbenih viljuški):

$$f_u = |f_1 - f_2|$$

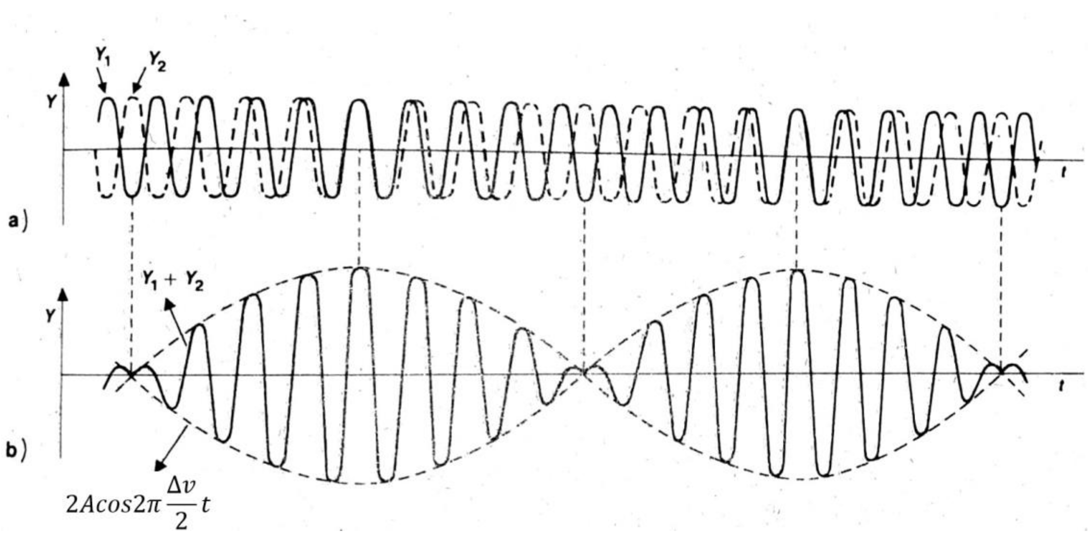
Frekvencija rezultirajućeg vala jednaka je srednjoj vrijednosti frekvencija pojedinih valova:

$$f = \frac{f_1+f_2}{2}$$

Zaključimo, kod interferencije dvaju zvučnih valova bliskih frekvencija nastaje rezultirajući val **(udari)** čija je frekvencija jednaka srednjoj vrijednosti frekvencija pojedinih valova, a amplituda mu se periodički mijenja frekvencijom jednakom razlici frekvencija valova koji interferiraju.



Slika 10.17. Glazbena viljuška



Slika 10.18. Nastajanje udara

10.15. GLAZBENI TONOVI

Zvukove kojima se služimo u glazbi, a nastaju pravilnim titranjem izvora nazivamo tonovima. Tonovi su zvukovi koji se uhu čine pravilnima, čistima i ugodnima. Međusobno se razlikuju visinom (ovisi o frekvenciji izvora), jakosti (ovisi o intenzitetu izvora), bojom (ovisi o učešću viših harmonika) i trajanjem (ovisi o duljini vremenskog intervala titranja izvora). Ako su ti valovi harmonijski, kažemo da je to čisti ton.

Kao ishodište za građenje glazbene ljestvice, može se uzeti ton bilo koje frekvencije. U glazbi se polazi od tona A u osnovnoj oktavi čija se frekvencija određuje dogovorom. Na međunarodnoj konferenciji održanoj u Londonu 1939. godine prihvaćen je dogovor da se za ton A propiše frekvencija 440 Hz. Apsolutne frekvencije svih drugih tonova dobiju se iz te vrijednosti i relativnih visina u odnosu na taj osnovni ton.

Niz tonova razvrstanih u oktave čini **glazbenu ljestvicu.** Niz tonova koji se rabe u skladbama je dur-ljestvica koju u intervalu jedne oktave čini osam tonova čije frekvencije stoje u omjerima:

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : f_5 : f_6 : f_7 : f_8 = 24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48$$

Oktavu čine tonovi čije se frekvencije odnose kao $f_1 : f_8 = 24 : 28 = 1 : 2$

Kvintu $f_1 : f_5 = 24 : 36 = 2 : 3$

Kvartu $f_1 : f_4 = 24 : 32 = 3 : 4$

Tercu $f_1 : f_3 = 24 : 30 = 4 : 5$

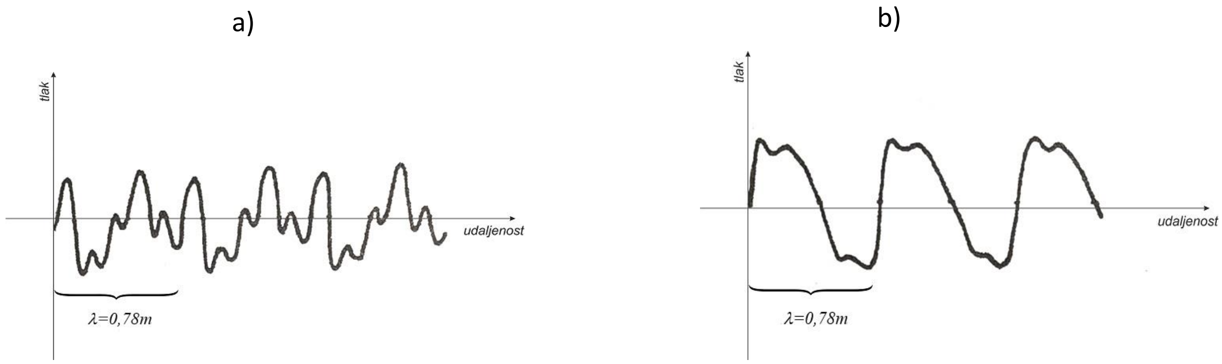
Sekstu $f_1 : f_6 = 24 : 40 = 3 : 5$

Osnovni niz od osam oktava zove se osnovna oktava.

Tonovi se označuju posebnim nazivima, pa tonovi čiji je omjer jedna ili više oktava dobivaju isti naziv. Tonovi dur-ljestvice obilježavaju se slovima: *c, d, e, f, g, a, h, c*. Ti se tonovi također obilježavaju slogovima: *do, re, mi, fa, so, la, ti, do.*

Boja tona

Čisti glazbeni tonovi imaju oblik harmonijskog vala određene valne duljine odnosno frekvencije. Međutim, zvučni valovi koji pripadaju određenom tonu često nisu pravilni (graf elongacije nije sinusoida, već može poprimiti razne složene oblike). Slika 10.19. prikazuje ton A, frekvencije 440 Hz dobivenog na violini i glasoviru. Vidimo da su oblici grafova zvučnih valova istog tona dobiveni na raznim glazbalima različiti, iako im je frekvencija jednaka. Tonovi jednake frekvencije, a različitog oblika grafa razlikuju se po **boji** (znači da je svaki ton određen svojom frekvencijom i bojom).



Slika 10.19. Grafovi tona A frekvencije 440 Hz violine (a) i glasovira (b)

Fourierov razvoj

Francuski matematičar Fourier dokazao je teorem da se svaki val frekvencije *f* može prikazati kao rezultat interferencije harmonijskih valova frekvencija *f*, 2*f*, 3*f*, 4*f*, 5*f*, …, svaki s nekom određenom amplitudom. Takav prikaz vala pomoću superpozicije harmonijskih valova zove se **Fourierov razvoj**. *f* je osnovna frekvencija, a frekvencije 2*f*, 3*f*, 4*f*, 5*f*, …, su viši harmonici. Što je neki val složenijeg oblika, u njegovu Fourierovu razvoju veći je udio viših harmonika. Prikaz nekog valnog oblika sinusnih valova pomoću Fourierova razvoja je:

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n}{T}t + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

PITANJA I ZADACI

1. Kako nastaje val? Navedite veličine kojima opisujemo val.
2. Kako iz jednadžbe vala možemo odrediti u kojem se smjeru širi val?
3. Objasnite refleksiju valova. Kada val pri odbijanju mijenja fazu?
4. Kako nastaje stojni val?
5. Objasnite titranje napete žice i vlastite frekvencije za pojedine slučajeve.
6. Što je zvuk?
7. O čemu ovisi brzina longitudinalnih valova? Izvedite izraz za ovisnost brzine zvuka o temperaturi.
8. Opišite i rastumačite Kundtovom cijevi. Kako nastaju stojni valovi?
9. Kako se odnose brzine zvuka u vodiku i CO_2 uz istu temperaturu?

10. Za koliko se promijeni brzina zvuka u zraku ako se temperatura povisi za 10 °C?
11. Što je intenzitet vala?
12. Koja je jedinica za intenzitet zvuka, a koja za glasnoću zvuka?
13. Kako se računa relativna razina intenziteta zvuka?
14. Koliki je intenzitet zvuka čija je razina 120 dB?
15. Navedite primjene ultrazvuka.
16. Objasnite Dopplerov učinak?
17. Koliku frekvenciju čuje čovjek na peronu ako se vlak od njega udaljava brzinom $72\ km\ h^{-1}$? Koliku bi frekvenciju čuo da se mu vlak približava istom brzinom. Frekvencija sirene je 1200 Hz?
18. Metalna žica na instrumentu duga je 60 cm i napeta silom 150 N. Promjer žice je 0,5 mm, a gustoća $7800\ kg\ m^{-3}$? Nađite osnovnu i prvu višu frekvenciju žice.

11. SVJETLOST

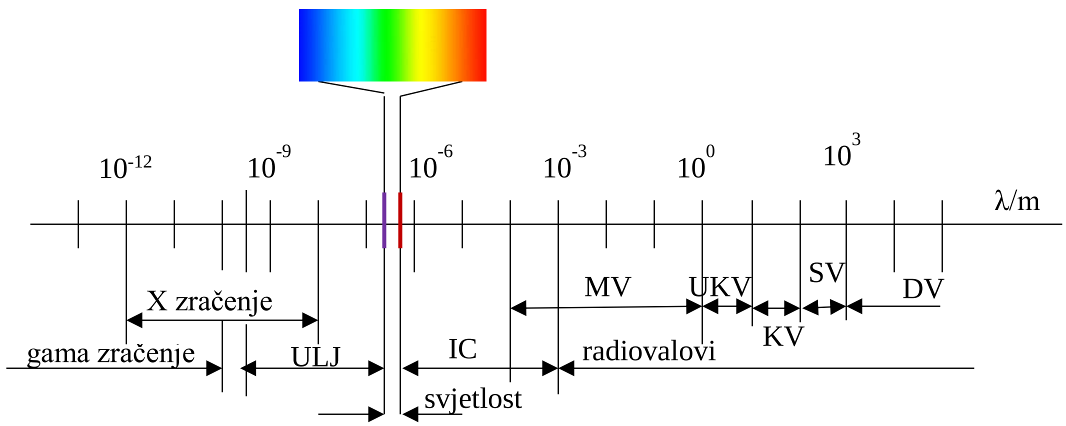
11.1. ŠTO JE SVJETLOST?

Optika je znanost o pojavama svjetlosti. Svjetlost je elektromagnetsko zračenje koje djeluje na mrežnicu našeg oka, a obuhvaća valne duljine između 400 nm i 700 nm. Svakoj valnoj duljini unutar tog intervala odgovara osjet određene boje koje odgovaraju bojama svjetlosti u dugi: crvena, narančasta, žuta, zelena, plava i ljubičasta. Svjetlost neke određene frekvencije jednobojna je ili monokromatska svjetlost. Kada se svjetlost svih boja pomiješa, nastaje bijela svjetlost.

Interferencijom, ogibom i polarizacijom pokazano je da je svjetlost valne prirode i da je svjetlost transverzalni val. No, što su valovi svjetlosti, što titra dok se val svjetlosti širi, bilo je riješeno otkrićem elektromagnetskih valova (J. C. Maxwell 1863. i H. Hetz 1888.). Maxwell je postavio hipotezu o postojanju elektromagnetskih valova i o elektromagnetskoj prirodi svjetlosti, a Heinrich Hertz uspio je tu hipotezu i eksperimentalno dokazati. U nizu briljantnih pokusa od 1887. do 1888. godine, Hertz je pokazao da se elektromagnetski valovi šire brzinom svjetlosti i da se na granici dvaju sredstava reflektiraju i lome po istim zakonima koji vrijede za svjetlost.

11.2. SPEKTAR ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA

Proučavanjem sveukupnog elektromagnetskog spektra bavi se optika u širem smislu. Elektromagnetski valovi, osim valnih obilježja, imaju i čestična svojstva koja nisu svojstvena valovima. Zato se za elektromagnetske valove obično upotrebljava naziv elektromagnetsko zračenje koji obuhvaća i valna i čestična svojstva. Elektromagnetsko zračenje poredano po valnim duljinama ili frekvencijama čini elektromagnetski spektar (slika 11. 1.). Svi se elektromagnetski valovi u vakuumu šire jednakom brzinom $c = \lambda f$ ($c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}) iz čega se zaključuje da valovi manje valne duljine imaju veću frekvenciju i obrnuto.



Slika 11.1. Elektromagnetski spektar

Elektromagnetska zračenja od najvećih valnih duljina prema manjim valnim duljinama jesu, redom: radiovalovi (DV- dugi valovi, SV – srednji valovi, KV – kratki valovi, UKV – ultrakratki, MV – mikrovalovi), infracrveno zračenje (IC), vidljiva svjetlost, ultraljubičasto zračenje (ULJ), rendgensko zračenje (X – zračenje) i gama-zračenje.

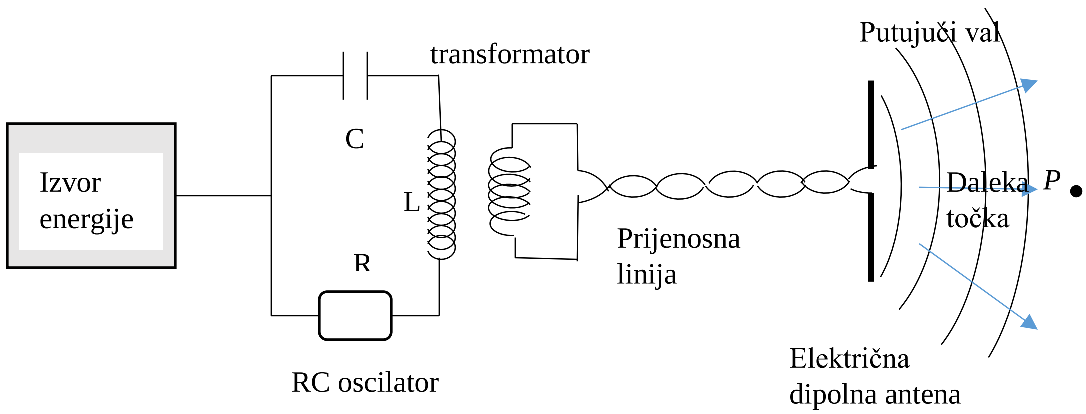
Svi se elektromagnetski valovi šire vakuumom brzinom svjetlosti $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} .

Akcelerirani naboji izvor su elektromagnetskih valova. Ako električni naboj titra, on emitira kontinuirani elektromagnetski val, a ako ima samo kratkotrajnu akceleraciju, tada emitira pulsni elektromagnetski val.

Frekvencija ovisi o akceleraciji naboja. Što je akceleracija naboja veća, to je veća frekvencija elektromagnetskih valova.

11.3. PUTUJUĆI ELEKTROMAGNETSKI VAL

Svjetlost i elektromagnetsko zračenje veće frekvencije od frekvencije vidljive svjetlosti zrači atom ili jezgra atoma. To je područje mikrosvijeta u kojem vrijede zakoni kvantne fizike. Valovi manje frekvencije, a veće valne duljine od vidljive svjetlosti nastaju u LC titrajnom krugu (slika 11.2.)



Slika 11.2. Nastanak elektromagnetskog vala

Detektor koji se nalazi u dalekoj točki registrirat će ravni putujući elektromagnetski val koga čine električna i elektromagnetska komponenta:

$$E = E_o \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

$$B = B_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

gdje su E i B trenutačne vrijednosti električnog i magnetskog polja, E_0 i B_0 njihove maksimalne vrijednosti (amplitude), a v brzina elektromagnetskog vala.

Može se pokazati da je brzina širenja valne fronte u smjeru širenja vala u sredstvu s određenom permitivnošću ε i permeabilnošću μ

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

Brzina širenja elektromagnetskog vala u vakuumu $(\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0)$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8{,}854 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} C^{-2} N s^2}}$$

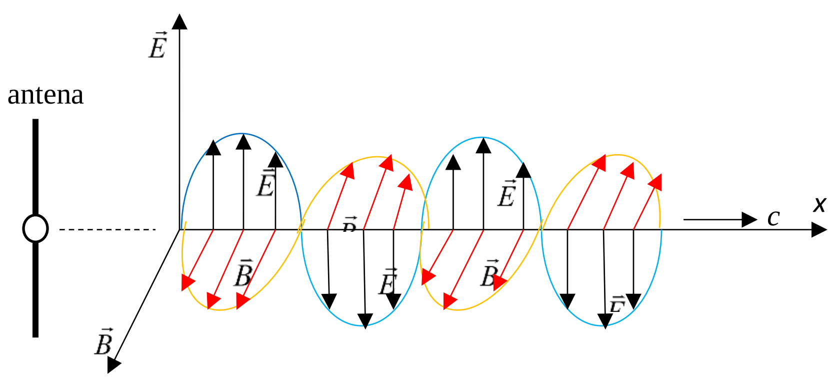
$$c = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

To je upravo brzina svjetlosti u vakuumu, što ukazuje na to da je svjetlost elektromagnetski val.

11.4. PRIKAZ ELEKTROMAGNETSKOG VALA

Električno i magnetsko polje titraju u međusobno okomitim smjerovima, a val se širi okomito na oba smjera (slika 10.3.). Električno polje titra uvijek u ravnini određenoj antenom, stoga je elektromagnetski val kojeg emitira antena polariziran, dakle, elektromagnetski val je transverzalni val.

Strelice različite duljine (na slici 9.3.) u različitim točkama duž osi *x* prikazuju koliki je iznos polja na tom mjestu, a ne prikazuju gibanje nekih čestica kao kod sličnog prikaza mehaničkog vala na žici. Sinusoida je ovojnica koja prikazuje iznose polja na različitim mjestima osi *x* u jednom trenutku.



Slika 11.3. Harmonijski ravni elektromagnetski val

11.5. GEOMETRIJSKA OPTIKA

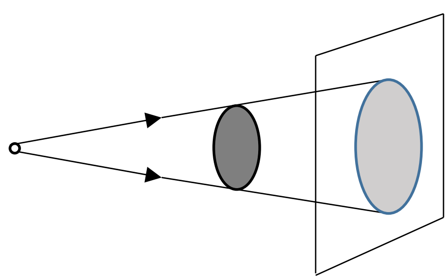
Geometrijska optika dio je optike u kojoj se svjetlosne pojave opisuju pomoću svjetlosnih zraka koje prikazujemo pravcima.

Postoje četiri zakona geometrijske optike koji su bili poznati još starim Grcima do kojih su došli na osnovu iskustva (empirije). To su:

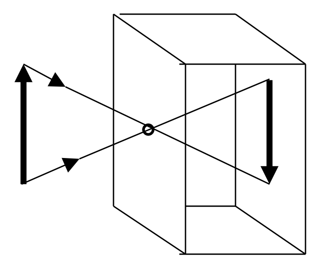
1. Zakon o pravocrtnom širenju svjetlosti
2. Zakon o neovisnosti snopova zraka svjetlosti
3. Zakon odbijanja (refleksije) svjetlosti
4. Zakon loma (refrakcije) svjetlosti

11.5.1. Zakon o pravocrtnom širenju svjetlosti

U optički homogenom i prozirnom sredstvu, svjetlost se širi pravocrtno. Zamišljamo da se svjetlost širi u zrakama koje su pravci. Taj je zakon primjenjiv kada su ogib i difrakcija svjetlosti zanemarivi. Pravocrtnim širenjem svjetlosti može se objasniti kako nastaje sjena predmeta obasjanog točkastim izvorom ili kako nastaje slika u tamnoj komori (camera obscura), preteći fotoaparata. Sjena predmeta na zastoru je geometrijska projekcija predmeta.



Slika 11.4. Geometrijska sjena



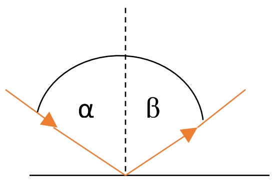
Slika 11.5. Tamna komora

11.5.2. Zakon o neovisnosti snopova zraka svjetlosti

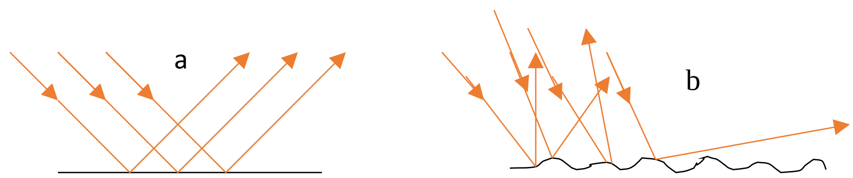
Kada jedan snop zraka svjetlosti prolazi kroz drugi, jedan na drugoga ne utječu. Primjerice, kada tri snopa zraka svjetlosti prolaze jedan kroz drugi, na mjestu gdje se prekrivaju dolazi do miješanja boja i nastaje bijela mrlja, ali se nakon prolaska svaki zasebno dalje širi bez utjecaja drugih snopova. Ako su snopovi koherentni dolazi do interferencije svjetlosti, što znači da tada ovaj zakon ne vrijedi.

11.5.3. Zakon odbijanja (refleksije) svjetlosti

Svjetlost se odbija od glatke ravne površine tijela na koje upada (slika 11. 6.)



Slika 11.6. Odbijanje svjetlosti



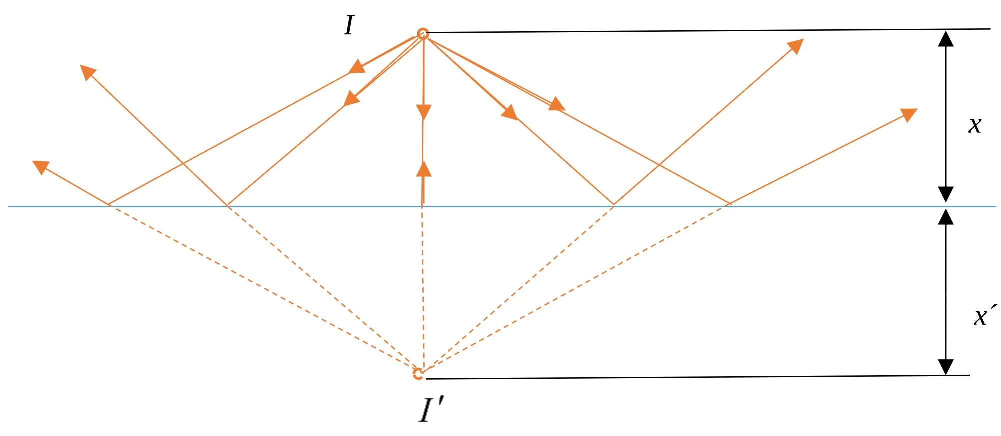
Slika 11.7. Usmjerena a) i difuzna b) refleksija

Zraka svjetlosti odbija se tako da je kut upadanja α jednak kutu odbijanja β, pri čemu upadna i odbijena zraka leže u istoj ravnini okomitoj na ravninu odbijanja. Kut upadanja je kut kojeg upadna zraka zatvara s okomicom na površinu refleksije, a kut odbijanja čine odbijena zraka i ista okomica.

Ovisno o površini od koje se svjetlost reflektira, razlikujemo usmjerenu i raspršnu (difuznu) refleksiju. Usmjerena refleksija događa se na glatkim površinama (zrcalima), a difuzna na hrapavim površinama (zidovima, listovima papira). Nakon usmjerene refleksije, paralelni snop zraka svjetlosti ostaje paralelan i nakon refleksije (slika 11.7. a), a nakon difuzne refleksije paralelni snop zraka svjetlosti raspršuje se u svim smjerovima (slika 11. 7. b)

Ravno zrcalo

Ravno zrcalo je svaka ravna i dobro uglačana površina koja može reflektirati svjetlost prema zakonu odbijanja.



Slika 11.8. Refleksija svjetlosti i nastajanje slike na ravnom zrcalu

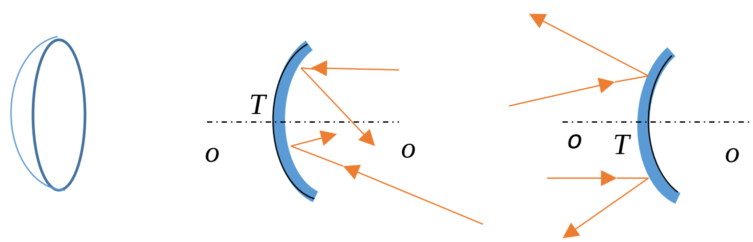
Iz točkastog izvora *I* zrake svjetlosti izlaze u svim smjerovima. Za konstrukciju slike dovoljne su tri zrake. Sliku točkastog izvora *I* vidimo u točki *I´* koja se nalazi u sjecištu produžetka reflektiranih zraka. Ravno zrcalo od točkastog izvora uvijek stvara točkastu sliku.

Slika dobivena pomoću ravnog zrcala je iza zrcala i ona je uvijek virtualna (ne može se uhvatiti na zastoru), uspravna, po veličini jednaka predmetu, jednako udaljena od zrcala kao i predmet $x = |x'|$, a desna i lijeva strana su zamijenjene.

Prema dogovoru, udaljenost predmeta od zrcala *x* je pozitivna, a udaljenost od zrcala do virtualnih slika *x´* je negativna.

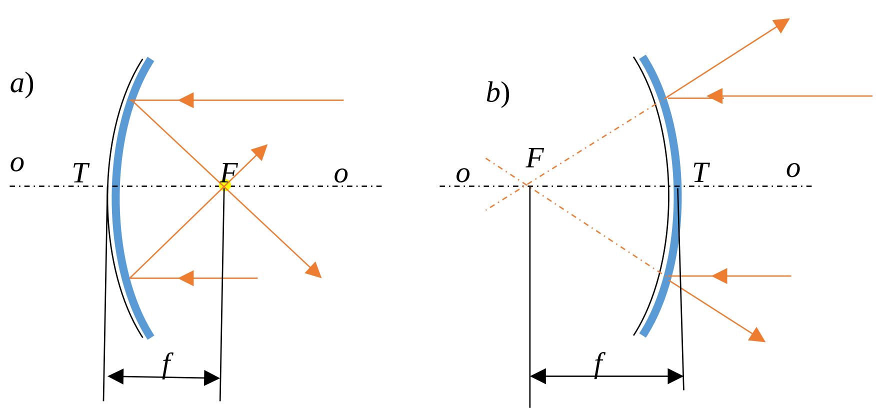
Sferna zrcala

Sferno zrcalo je dio kugline plohe (sfere) koja jednom stranom odbija svjetlosne zrake. Ako zrake odbija udubljenom (unutarnjom) stranom, naziva se udubljeno ili konkavno zrcalo, a ako ih odbija vanjskom stranom, naziva se izbočeno ili konveksno zrcalo.



Slika 11.9. Sferna zrcala

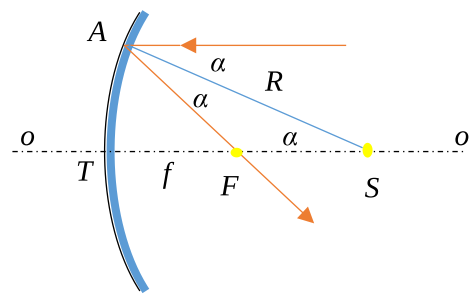
Središnja točka na zrcalu je tjeme zrcala *T*. Pravac na kojem leži tjeme i središte zakrivljenosti *S* zove se optička os (slika 11.10.)



Slika 11.10. Određivanje žarišta udubljenog i izbočenog zrcala

Ograničimo se, u svojim razmatranjima, na zrake koje idu blizu optičkoj osi i s njom zatvaraju male kutove. To su paraaksijalne zrake. Pokusima je utvrđeno da se sve paraaksijalne zrake koje na konkavno zrcalo upadaju paralelno s optičkom osi, nakon odbijanja sijeku u jednoj točki koja se nalazi na optičkoj osi. Tu točku nazivamo žarište ili fokus *F* konkavnog sfernog zrcala. Udaljenost od žarišta do tjemena naziva se žarišna ili fokusna daljina *f*.

Analogna razmatranja možemo provesti za izbočeno zrcalo (slika 11.10. b). Uočit ćemo da se zrake nakon odbijanja raspršuju i da se njihovi produžeci u suprotnom smjeru od smjera odbijanja sijeku u jednoj točki na optičkoj osi zrcala. Ta točka je žarište ili fokus. Kada se zrake realno ne sijeku žarište je virtualno.



Slika 11. 11. Određivanje položaja žarišta

Paraaksijalna zraka, koja upada u točki *A* na udubljeno sferno zrcalo, odbija se u točki *A*. Točku *A* možemo smatrati malenim dijelom ravnog zrcala. Okomica na to ravno zrcalo je polumjer zakrivljenosti zrcala *R*, pri čemu su kut upadanja i refleksije jednaki (slika 11.11.). Tada je i kut između polumjera *R* i optičke osi jednak kutu α, pa je trokut *AFS* jednakokračan jer je $|AF| = |FS|$. Kako se radi o paraaksijalnim zrakama, tada je i $|AF| \approx |TF|$ odnosno $|TF| \approx |FS|$. Dakle, žarište se nalazi na polovici između *T* i *S*, žarišna daljina jednaka je polovici polumjera zakrivljenosti zrcala:

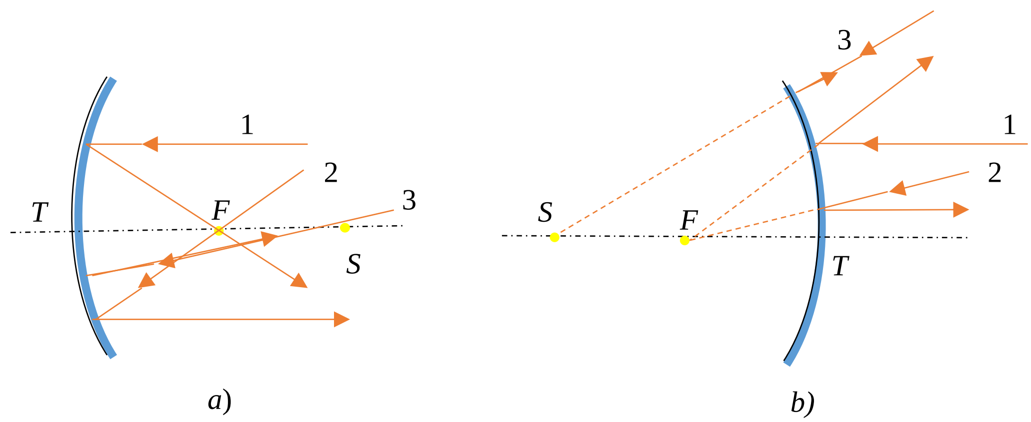
$$f = \frac{R}{2}$$

Za konstrukciju slike rabimo tri karakteristične zrake. Za udubljeno zrcalo (slika 11.12. a) vrijedi:

1. Zraka koja ide paralelno s optičkom osi odbija se od zrcala tako da ide kroz žarište
2. Zraka koja ide kroz žarište odbija se od zrcala tako da ide paralelno s optičkom osi
3. Zraka koja ide kroz središte odbija se sama u sebe

Za izbočeno zrcalo (slika 11.12. b) vrijedi:

1. Zraka koja ide paralelno s optičkom osi, odbija se kao da izlazi iz žarišta
2. Zraka koja upada u smjeru žarišta, odbija se od zrcala tako da ide paralelno s optičkom osi
3. Zraka koja upada u smjeru središta zakrivljenosti zrcala, odbija se sama u sebe

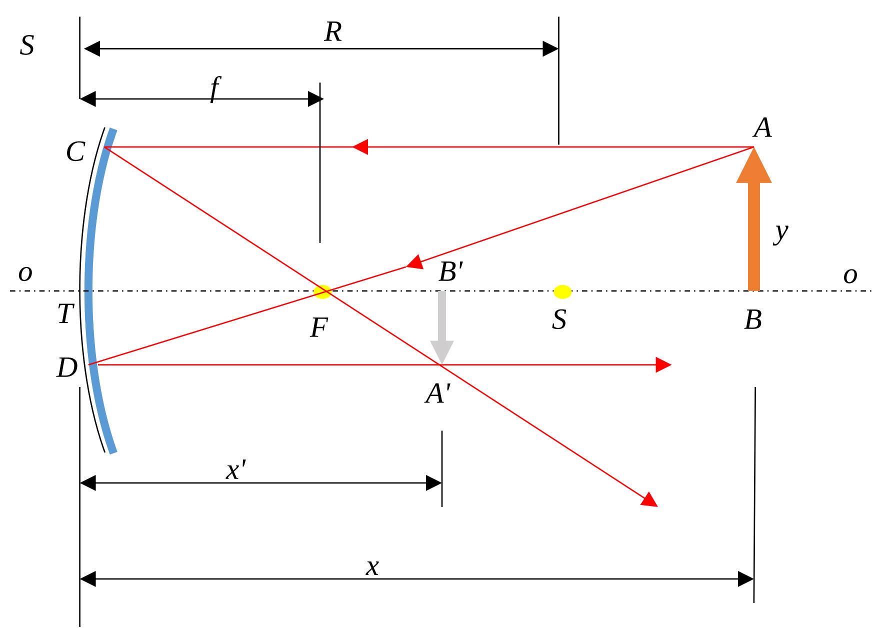


Slika 11.12. karakteristične zrake: a) udubljeno sferno zrcalo, b) izbočeno sferno zrcalo

Konstrukcija slike

Udubljeno sferno zrcalo

Za konstrukciju slike rabimo tri karakteristične zrake. Neka se na optičkoj osi nalazi predmet u obliku strelice okrenut prema gore i neka mu je visina *y*. Iz vrha predmeta zrake izlaze u svim smjerovima, a za konstrukciju slike dovoljne su tri karakteristične zrake, odnosno dvije zrake. Neka se predmet nalazi na udaljenosti *x* od tjemena udubljenog zrcala koja je veća od 2*R*, tj. x > R. Konstrukcija je na slici 11.13.



Slika 11.13. Konstrukcija slike predmeta udaljenog za x > R kod udubljenog zrcala

Udaljenost predmeta od tjemena udubljenog zrcala označili smo x, x' je udaljenost slike od tjemena udubljenog sfernog zrcala, *f* je žarišna daljina, *y* je veličina predmeta, *y'* je veličina slike predmeta, *R* je polumjer zakrivljenosti udubljenog sfernog zrcala, *m* je linearno povećanje zrcala.

Udaljenost predmeta od tjemena *x*, udaljenost slike od tjemena *x'* i žarišna daljina *f* povezane su jednadžbom koja se zove **jednadžba sfernog zrcala.**

Iz slike 11.13. izvedimo jednadžbu sfernog zrcala. U ishodište koordinatnog sustava stavimo tjeme sfernog zrcala tako da možemo pojedine veličine označavati pozitivnima i negativnima, rabeći predznake koordinatnih osi po kvadrantima. Za paraaksijalne zrake vrijedi da su likovi *CTF* i *TDF* trokuti. Trokuti CTF FA'B' su slični, pa vrijedi:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{x'-f}{f}$$

Također su slični i trokuti *TDF* i *AFB*, pa vrijedi:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{f}{x-f}$$

Iz ovih dviju jednadžbi dobivamo jednadžbu sfernog zrcala:

$$\frac{x'-f}{f} = \frac{f}{x-f}$$

$$xx' - fx - fx' + f^2 = f^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \quad \text{jednadžba sfernog zrcala}$$

Omjer veličine slike *y'* i veličine predmeta *y* naziva se **linearno povećanje zrcala** i označava se s *m*:

$$m = \frac{y'}{y}$$

Za sferno zrcalo povećanje je:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{x'}{x} \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} \qquad m = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}$$

Slika predmeta dobivena pomoću udubljenog sfernog zrcala za naš slučaj kada je x > R je:

realna (x' > 0), zrake se realno sijeku i sliku možemo dobiti na zastoru;

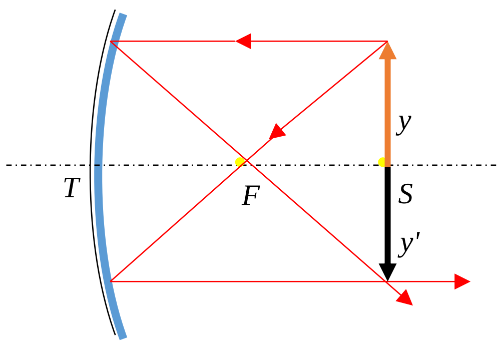
umanjena (0 < m < 1);

obrnuta (y' < 0)

Slika nastaje između žarišta i središta zakrivljenosti zrcala (f < x' < R)

Promotrimo kakve su slike predmeta ako predmet pomičemo prema tjemenu zrcala. Neka je:

1. $x = R$

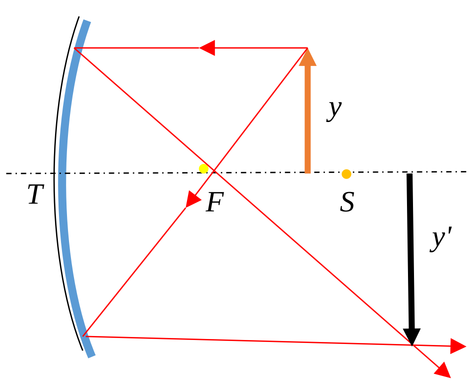


Slika je:

- realna (x' > 0)
- obrnuta (y' < 0, m < 0)
- jednaka po veličini predmetu (y' = y, m = 1)
- x' = R

Slika 11. 14. $x = R$

2. f > x < R

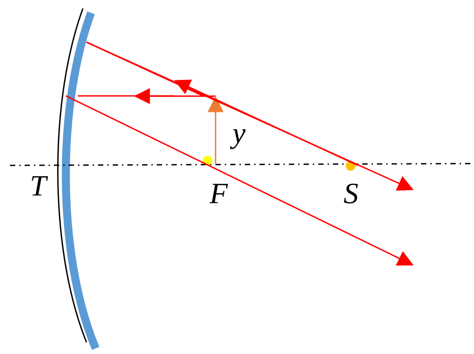


Slika je:

- Realna x' > 0
- Obrnuta y' < 0, m < 0
- Uvećana |y'| > 1, |m|> 1
- x' > R

Slika 11. 15. $f > x < R$

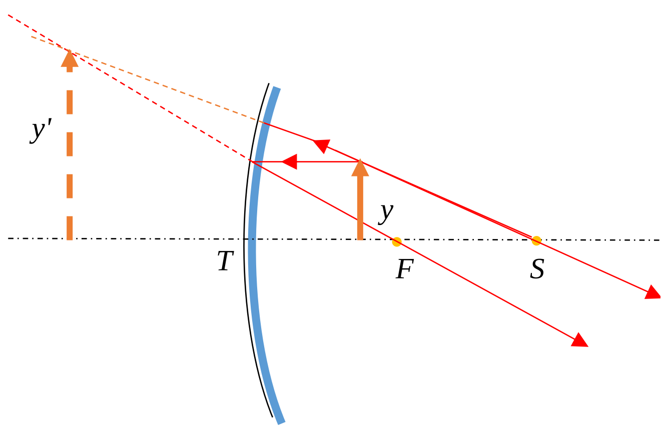
3. x = *f*



Slika je beskonačnosti, $x' \to \infty$

Slika 11.16. $x = f$

4. 0 < x < f



Slika je

- Virtualna, x' < 0
- Uspravna, y' > 0, |m| > 1
- Uvećana y' >1, m > 0

Slika 11. 17. 0 < x < f

Primjer 11.1.

Konkavno sferno zrcalo polumjera zakrivljenosti 40 cm daje realnu i obrnutu sliku koja je dva puta manja od predmeta. Odredite položaj predmeta i slike.

Rješenje

R = 40 cm

m = $-\dfrac{1}{2}$

x = ?

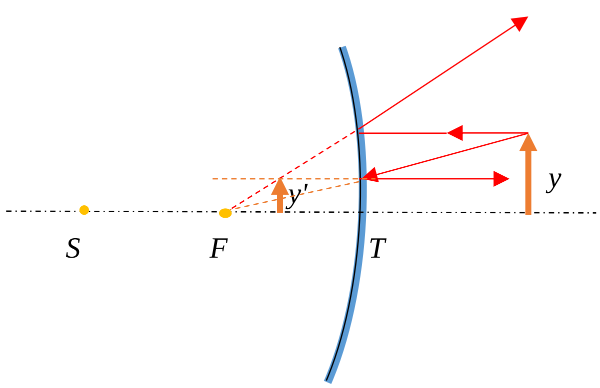
x' = ?

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} \qquad -\frac{1}{2} = -\frac{x'}{x} \qquad x = 2x'$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} \qquad \frac{1}{20} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} \qquad x = 60\text{ cm} \qquad x' = 30\text{ cm}$$

Izbočeno (konveksno) zrcalo

Konstrukcija slike



Slika je uvijek:

- Virtualna, x' < 0
- Umanjena , y' < 1, |m| < 1
- Uspravna y' > 0, m > 0

Slika 11. 18. Konstrukcija slike kod izbočenog zrcala

Vidimo da su kod udubljenog zrcala uspravne slike virtualne, a obrnute realne, a kod izbočenog zrcala slika je uvijek uspravna te je uvijek i virtualna.

Jednadžba udubljenog sfernog zrcala vrijedi u istom obliku i za izbočeno (konveksno) zrcalo s tim da u tu jednadžbu uvrštavamo s negativnim predznakom udaljenost virtualne slike od tjemena zrcala i žarišnu daljinu konveksnog zrcala.

Izraz za linearno povećanje također vrijedi u istom obliku kao i za udubljeno. U njega s negativnim predznakom uvrštavamo veličinu obrnute slike u odnosu na predmet.

Napomena: za $m > 0$ slika je uspravna, za $m < 0$ slika je obrnuta, za $|m| > 1$ slika je uvećana, za $|m| < 1$ slika je umanjena, za $x' < 0$ slika je virtualna.

Primjer 11.2.

Konveksno zrcalo ima polumjer zakrivljenosti 60 cm. Na udaljenosti 10 cm ispred zrcala nalazi se predmet visok 2 cm. Odredite položaj i veličinu slike računski i konstrukcijom.

Rješenje

$R = 60$ cm

$x = 10$ cm

$\underline{y = 2 \text{ cm}}$

$x', y' = ?$

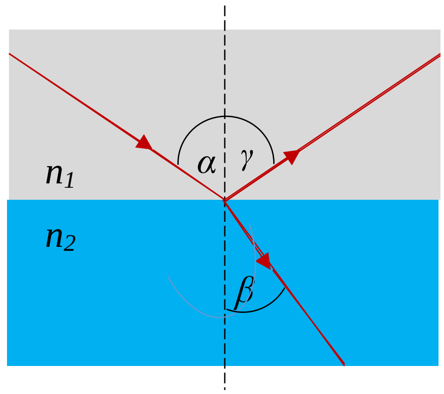
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} \qquad -\frac{1}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{x'} \qquad x' = -7{,}5 \text{ cm}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} \qquad \frac{y'}{2} = -\frac{-7{,}5}{10} \qquad y' = 1{,}5 \text{ cm}$$

Za grafičko rješenje vidjeti sliku 11.18.

11.5.4. Zakon loma (refrakcije)

Kada zraka svjetlosti prelazi iz jednog sredstva u drugo, na granici dvaju sredstava jedan se dio zrake lomi, a jedan reflektira. Upadna zraka, okomica, lomljena i odbijena zraka leže u istoj ravnini koja je okomita na ravninu sredstva (slika 11.19.)



Slika 11. 19. Lom svjetlosti

Za upadni kut α i kut loma β vrijedi Snellov zakon:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \text{ili} \qquad n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

gdje je n_{21} relativni indeks loma drugog sredstva u odnosu na prvo sredstvo, n_1 indeks loma prvog sredstva u kojem se upadna zraka širi, n_2 indeks loma drugog sredstva u kojem se širi lomljena zraka.

Indeks loma (ili apsolutni indeks loma) nekog sredstva je omjer brzine svjetlosti u vakuumu c i brzine svjetlosti u tom sredstvu v, pa je:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \qquad\qquad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Indeks loma za vakuum n = 1, a indeks loma za zrak neznatno je veći od 1 (pri normiranom tlaku i temperaturi 20 °C iznosi n = 1,00028). Staklo i druga optički prozirna sredstva imaju indeks loma veći od 1 (za vodu je $n = \frac{4}{3}$).

Konačno, za relativni indeks loma drugog sredstva u odnos na prvo sredstvo možemo pisati:

$$n_{21} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Primjer 11.3.

Zraka svjetlosti upada iz vakuuma na ravnu staklenu ploču indeksa loma n = 1,5. Koliko iznosi kut upadanja, ako lomljena zraka s odbijenom zrakom zatvara kut 130,5°?

Rješenje

n = 1,5

$\underline{\delta = 130{,}5°}$

$\alpha = ?$

$\alpha = \gamma$

$\beta = 180° - (\alpha + \delta)$

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\sin\alpha = n\sin\beta$$

$$\sin\alpha = n\sin\left[180^{\circ} - (\alpha + \delta)\right] = n\sin(\alpha + \delta)$$ sin(180° - α) = sinα; sin(α+β) = sinαcosβ+cosαsinβ

$$\sin\alpha = n(\sin\alpha\cos\delta + \cos\alpha\sin\delta) \quad /: \cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = n\left(\frac{\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha\sin\delta}{\cos\alpha}\right)$$

tgα = n(tgαcosδ + sinδ)

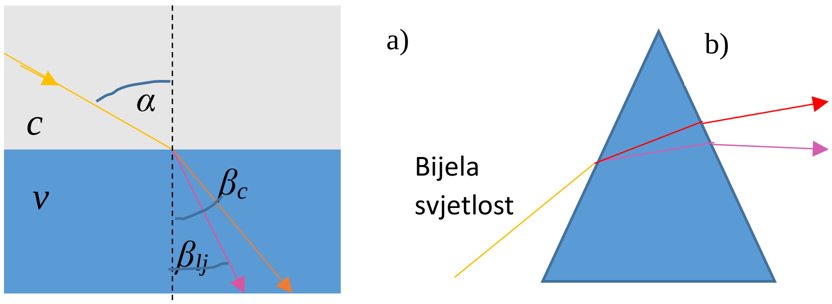
$$tg\alpha = \frac{n\sin\delta}{1 - n\cos\delta}$$

$\alpha = 30°$

Disperzija svjetlosti

Pokusima je pokazano da indeks loma nekog sredstva ovisi o valnoj duljini tj. o boji svjetlosti (osim u vakuumu). To uzrokuje da pri prijelazu svjetlosti iz jednog sredstva u drugo, na njihovoj granici dolazi do rasapa svjetlosti po valnim duljinama. Ta se pojava zove **disperzija svjetlosti**.

Bijela se svjetlost sastoji od svih valnih duljina (boja) vidljivog spektra s istim iznosom. Na granici dvaju optičkih sredstava, različite boje lome se pod različitim kutovima tj. dolazi do disperzije (slika 11. 20.)



Slika 11. 20. Disperzija svjetlosti

$$n = \frac{c}{v} \qquad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

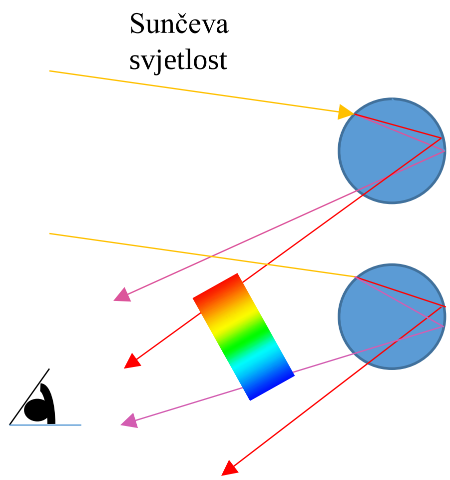
$$n_c = \frac{c}{v_c} \qquad n_{lj} = \frac{c}{v_c} \qquad n_c = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_c} \qquad n_{lj} = \frac{si\alpha}{\sin\beta_{lj}}$$

Kako je $v_c > v_{lj}$, zaključujemo:

$n_c < n_{lj}$ pa je $\sin\beta_c > \sin\beta_{lj}$ tj. $\beta_c > \beta_{lj}$

Za isti kut upadanja α, kut loma za crvenu svjetlost veći je nego kut loma za ljubičastu svjetlost. Pokusi s disperzijom svjetlosti obično se izvode pomoću staklene prizme (slika 9.20. b). Kut devijacije veći je za ljubičastu nego za crvenu svjetlost (crvena se svjetlost otklanja najmanje, a ljubičasta najviše).

Kao primjer disperzije može se uzeti i nastanak duge (slika 11.21.)

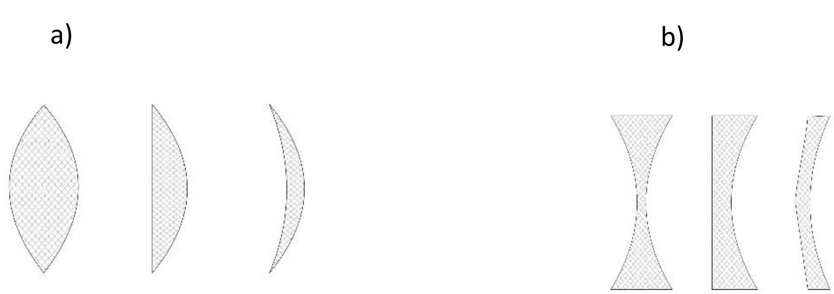


Slika 11.21. Nastanak duge

Upadna Sunčeva svjetlost raspršuje se na vodenim kapljicama u atmosferi. Upadna zraka najprije se lomi pri ulasku u kapljicu, zatim nastaje totalna refleksija na stražnjoj strani kapljice, pa se na izlazu iz kapljice opet lomi uz raspršenje upadne svjetlosne zrake prema valnim duljinama. Takva disperzija bijele svjetlosti na vodenim kapljicama uzrok je nastajanja duge, a opažač je vidi kada je okrenut leđima Suncu, a ispred njega su kišne kapljice u zraku negdje u daljini.

Optičke leće

Leća je optičko sredstvo omeđeno s dva sferna dioptra ili jednim sfernim i jednim ravnim. Pravac koji prolazi središtem zakrivljenosti sfernih dioptara zove se optička os.



Slika 11. 22. Konvergentne (a) i divergentne leće (b)

Ograničit ćemo se na tanke leće tj. one za koje je udaljenost između tjemena sfernih dioptara mala. Leće se dijele na dvije vrste: konvergentne (sabirače) i divergentne (rastresače).

Konvergentne leće su one koje su na sredini deblje nego na rubovima, a divergentne su one koje su na sredini tanje nego na rubovima (slika 11.22).

Promatrat ćemo slučajeve kada zrake na leće padaju u blizini optičke osi, tj. paraaksijalne zrake.

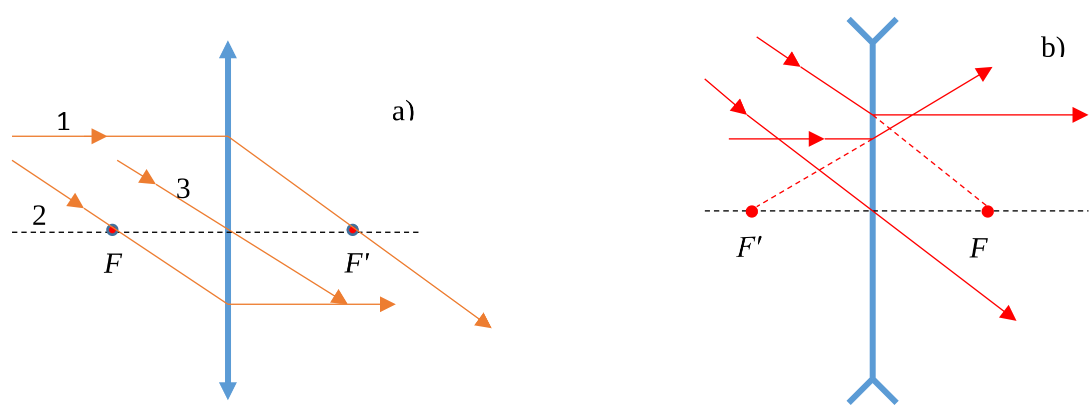
Ako na konvergentnu leću upada paralelan snop zraka svjetlosti, nakon prolaska kroz leću one se fokusiraju u jednu točku koja se zove žarište ili fokus (*F*). Udaljenost žarišta od leće zove se žarišna daljina (*f*). Konvergentna leća ima dva žarišta i to žarište predmeta (*F*) i žarište slike (*F*'). Oba su žarišta jednakovrijedna, a koje ćemo kako zvati ovisi o smjeru upadne svjetlosti, pa ih možemo označavati samo s (*F*).

Ako na divergentnu leću upada paralelan snop zraka svjetlosti one će se nakon prolaska kroz leću raspršiti tako kao da izlaze iz jedne točke koja leži na optičkoj osi ispred leće. Ta je točka virtualno žarište (*F*).

Nastajanje slike pomoću konvergentne leće

Za konstrukciju slike dovoljne su tri karakteristične zrake koje izlaze iz vrha predmeta (slika 9.23.)

1. Zraka koja upada paralelno s optičkom osi, lomi se u leći i nakon prolaska kroz leću prolazi kroz žarište slike (*F*')
2. Zraka koja izlazi iz žarišta premeta (*F*), lomi se i nakon prolaska kroz leću ide paralelno s optičkom osi
3. Zraka koja prolazi kroz sredinu leće, prolazi kroz leću bez loma.



Slika 11. 23. Nastajanje slike a) konvergentna leća, b) divergentna leća

Nastajanje slike pomoću divergentne leće

Za konstrukciju slike rabimo tri karakteristične zrake koje izlaze iz vrha predmeta:

1. Zraka koja upada na leću paralelno s optičkom osi, lomi se kroz leću tako da nakon prolaska ide u smjeru kao da izlazi iz virtualnog žarišta slike *F*' (raspršuje se)
2. Zraka koja prolazi kroz leću u smjeru žarišta predmeta *F*, nakon loma u leći ide paralelno s optičkom osi
3. Zraka koja prolazi kroz sredinu leće, ne lomi se kroz leću.

Jednadžba leće
Za konvergentnu i divergentnu leću upotrebljavamo iste izraze, s tim da moramo voditi računa o predznacima.

Jednadžba leće

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

gdje je x udaljenost predmeta od leće, x' je udaljenost slike od leće, f je žarišna daljina.

Linearno povećanje m omjer je između veličine slike y' i veličine predmeta y.

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}$$

Jakost leće j recipročna je vrijednost žarišne daljine izražena u metrima

$$j = \frac{1}{f}$$

Jakost leće iskazujemo u dioptrijama (dpt), [1dioptrija = m^{-1}]. Jakost konvergentnih leća pozitivna, divergentnih negativna.

Jakost leće i žarišna daljina ovise o indeksu loma leće n_2 i indeksu loma sredstva u kojem se leća nalazi n_1 te o polumjerima zakrivljenosti dioptara R_1 i R_2 prema izrazu:

$$j = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Za konvergentne i divergentne leće vrijede isti izrazi s time da moramo voditi računa o predznacima. S predznakom minus u poznate izraze uvrštavamo:

1. Žarišnu daljinu f divergentne leće

2. Udaljenost predmeta *x* od leće ako je predmet virtualan
3. Udaljenost slike x' od leće ako slika virtualna
4. Veličini slike y' i linearno povećanje ako je slika obrnuta
5. Polumjere zakrivljenosti udubljenih dioptara

Kao i kod zrcala slika može biti:

1. Realna, tada je $x' > 0$, $y' < 0$, m < 0
2. Virtualna, tada je x' < 0, y' > 0, m > 0
3. Obrnuta, tada je $x' > 0$, $y' < 0$, $m < 0$
4. Uspravna, tada je x' < 0, y' > 0, m > 0
5. Uvećana, tada je y' > y, $|m| > 1$
6. Umanjena, tada je y' < y, $|m| < 1$

Mogući slučajevi dobivanja slike u ovisnosti o udaljenosti predmeta od leće (sami provedite konstrukciju slike):

1. Ako je $x > 2f$, tada je slika realna $f < x' < 2f$, obrnuta y' < 0, umanjena $-1 < m < 0$,
2. Ako je $x = 2f$, tada je slika realna $x' = 2f$, obrnuta y' < 0, jednaka po veličini predmetu $m = -1$
3. Ako je $f < x < 2f$, tada je slika realna $x' > 2f$, obrnuta y' < 0, uvećana $m < -1$
4. Ako je $x = f$, tada je slika u $x' = \pm\infty$, $m = \mp\infty$
5. Ako je x < f, tada je slika virtualna x' < 0, uspravna y' > 0, uvećana m > 1
6. Ako je $x \rightarrow \infty$ tada je slika realna $x' \rightarrow f$ u žarišnoj ravnini, obrnuta y' < 0, umanjena $m \rightarrow 0$

Primjer 11.4.

Predmet visok 3 cm nalazi se 60 cm daleko od divergentne leće kojoj je žarišna daljina 30 cm. Odredite veličinu slike računski i konstrukcijom.

Rješenje

$y = 3$ cm

$x = 60$ cm

$f = -30$ cm

$y' = ?$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}$$

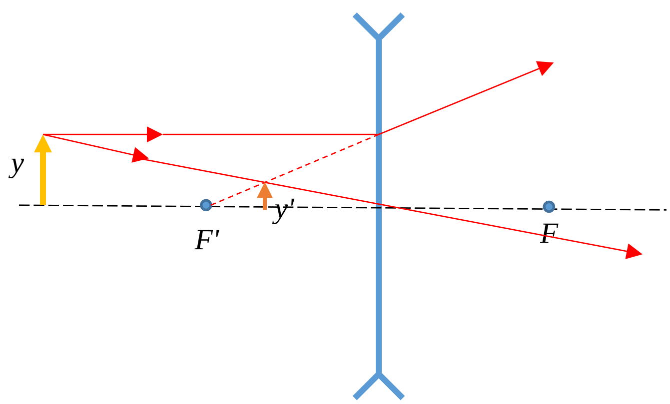
$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}$$

$$x' = -20\,\text{cm} \qquad \text{(slika je virtualna)}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}$$

$$y' = -\frac{x'}{x}y$$

$$y' = 1\,\text{cm}$$



Slika 11.24. Divergentna leća

Divergentna leća uvijek daje virtualnu, uspravnu i umanjenu sliku bez obzira na to gdje se predmet nalazi.

Primjer 11.5.

Lećom žarišne daljine 15 cm želimo na zastoru udaljenom 80 cm od predmeta dobiti sliku tog predmeta. Koliko daleko od predmeta treba postaviti leću da bismo dobili jasnu sliku predmeta?

Rješenje

f = 15 cm

$\underline{d = 80\text{ cm}}$

x = ?

Kako sliku dobivamo na zastoru, slika je realna, pa vrijedi da je $d = x + x'$. Primjenjujemo jednadžbu leće:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}$ u koju uvrštavamo x' = 80 – x, pa dobivamo:

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{x}+\frac{1}{80-x}$$

$$\frac{1}{15}=\frac{80-x+x}{x(80-x)}$$

$$x(80-x)=1200$$

$$x^2-80x+1200=0$$

Dobili smo potpunu kvadratnu jednadžbu koja ima dva rješenja:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

x_1 = 60 cm x_2 = 20 cm

Optički uređaji

Od raznih optičkih uređaja kod kojih susrećemo leće, opisat ćemo oko i lupu.

Oko je približno kuglastog oblika, promjera oko 2,5 cm. Glavni dio oka je očna leća. Od predmeta koji se nalazi ispred oka na mrežnici se stvara umanjena i obrnuta slika. Žarišna daljina leće oka pri gledanju nekog predmeta mora biti takva da slika predmeta padne točno na mrežnicu oka, pa se ona mora mijenjati pomoću očnih mišića koji drže leću. Sposobnost očne leće da joj se brzo mijenja žarišna daljina i tako stvara oštru sliku predmeta koji se nalaze na raznim udaljenostima od oka zove se akomodacija oka.

Najbližu točku na kojoj se oko može akomodirati tako da se na mrežnici dobije oštra slika zove se bliza točka koja za normalno oko iznosi 25 cm. To je za normalno oko najmanja udaljenost jasnog vida.

Daleka točka je točka kod koje oko bez naprezanja stvara sliku na mrežnici oka. Ona se nalazi u neizmjernoj udaljenosti.

Mane oka su dalekovidnost i kratkovidnost. Dalekovidno oko od upadnog svjetlosnog snopa stvara sliku iza mrežnice oka. Dalekovidnost se korigira konvergentnim lećama. Kratkovidno oko od upadnog svjetlosnog snopa stvara sliku ispred mrežnice oka. Kratkovidnost se korigira divergentnim lećama.

Primjer 11.6.

Čovjek ne može jasno vidjeti predmete koji su bliže od 1 m. Koju leću mora upotrijebiti da bi mogao čitati novine na udaljenosti 25 cm od očiju?

Rješenje:

x = 25 cm

x' = -1 m

j = ?

Slika koju daje leća naočala mora biti predmet za očnu leću, pa od predmeta koji se nalazi na udaljenosti 25 cm mora stvoriti sliku na udaljenosti 1m. Dakle, leća naočala mora biti konvergentna jer se s iste strane mora nalaziti i predmet i slika, a to znači da slika mora biti virtualna. Kada smo to utvrdili, lako izračunamo jakost leće:

$$j = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'}$$

$$j = \frac{1}{0,25} + \frac{1}{-1}$$

$j = 3\,m^{-1}$ = 3 dpt (konvergentna leća)

Primjer 11.7.

Ante se nalazi u učionici i ne može oštro vidjeti predmete koji se nalaze na udaljenosti većoj od 75 cm od oka. Koju će leću Ante koristiti da može udaljene predmete oštro vidjeti?

Rješenje:

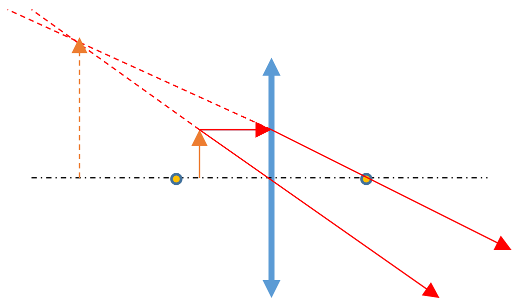
Radi se o kratkovidnoj osobi koja mora koristiti divergentnu leću koja mora dati sliku udaljenih predmeta $x \to \infty$ na udaljenosti x' = - 80 cm od očne leće (virtualna slika) da je oko jasno vidi. Jakost leće bit će:

$$j = \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{0,75m} = -\frac{4}{3}m^{-1}$$

j = - 1,33 dpt (divergentna leća)

Jednostavno povećalo (lupa)

Povećalo služi za povećanje vidnog kuta pod kojim gledamo neki blizi predmet. Povećalo je konvergentna leća čija je žarišna daljina manja od blize točke oka (f < 25 cm). Predmet se postavi između leće i žarišta tako da daje povećanu virtualnu sliku predmeta na položaju blize točke oka, pa oko stvara na mrežnici povećanu realnu sliku.



Slika 11.25 Konvergentna leća kao povećalo

PITANJA I ZADACI

1. Nabrojite osnovne zakone geometrijske optike. Što pomoću njih možemo objasniti u optici?
2. Napišite jednadžbu za ravno i sferno zrcalo?
3. Nabrojite boje spektra vidljive svjetlosti. Koja boja ima najveću valnu duljinu, a koja najmanju? Napišite jednadžbu koja povezuje valnu duljinu, frekvenciju i brzinu svjetlosti.
4. U kojim granicama leži vidljiva svjetlost s obzirom na valnu duljinu i frekvenciju?
5. Kakva je slika u ravnom, a kakva u sfernom zrcalu?
6. Komentirajte indeks loma?
7. Što je disperzija svjetlosti?
8. Kako nastaje elektromagnetski val?
9. Kakva je veza između brzine elektromagnetskog vala i permitivnosti sredstva?
10. Kolika je permitivnost stakla ako je indeks loma n = 1,58?
11. Kakva je veza između električnog i magnetskog polja u elektromagnetskom valu?
12. Električno polje svjetlosnog vala dano je izrazom $E\left[\frac{V}{m}\right] = 0{,}7 \sin \pi (2 \cdot 10^{15} t[s] - 4 \cdot 10^{6} x[m])$. Odredite amplitudu, frekvenciju, valnu duljinu, period i brzinu.
13. Pokažite vezu između indeksa loma, permitivnosti i permeabilnosti.
14. Nabroji spektar elektromagnetskih valova redom počevši od najveće valne duljine.
15. Na zastoru udaljenom 1,2 m od tjemena sfernog zrcala želimo dobiti dvostruko uvećanu sliku predmeta. Koliki mora biti polumjer zrcala?
16. Kako biste odredili koje naočale imaju pozitivnu, a koje negativnu dioptriju?
17. Izvedite formulu za promjenu valne duljine pri prijelazu elektromagnetskog vala iz jednog medija u drugi.

18. Predmet je udaljen 10 cm od konvergentne leće čija je žarišna daljina 14 cm. Kolika je udaljenost slike od leće? Što znači predznak te udaljenosti? Što ako je predmet udaljen 15 cm od leće? Primjer riješite i grafički i računski?
19. Usporedimo normalno, dalekovidno i kratkovidno oko. Na koji se način pomoću leće ispravlja dalekovidnost, a na koji način kratkovidnost?

12. UVOD U KVANTNU FIZIKU

Kvantna fizika nastala je početkom 20. stoljeća iz problema klasične teorije toplinskog zračenja. Rayleigh i Jeans proučavali su spektar koji emitiraju užarena tijela koristeći se klasičnom elektrodinamikom i statistikom. Teorijski rezultat bio je u nerješivoj suprotnosti s eksperimentalnim rezultatima. Rješenje tog problema iznio je Max Planck na sastanku njemačkog fizikalnog društva 14. prosinca 1900. godine. On je pretpostavio da atomi imaju kvantizirana energijska stanja i da pri prijelazu iz jednog (višeg) kvantnog stanja u drugo (niže) emitiraju energiju u obliku kvanta, a ne kontinuirano kao što je pretpostavljala klasična fizika.

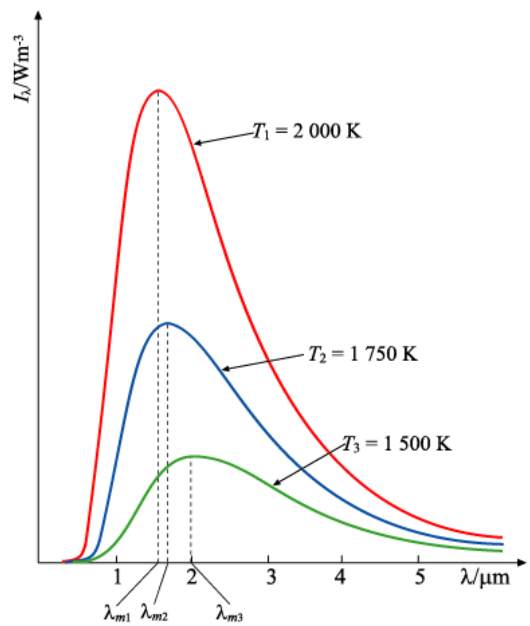
Albert Einstein je 1905. protumačio fotoelektrični učinak pretpostavljajući da se elektromagnetsko zračenje (svjetlost) ponaša kao roj čestica (korpuskula) u interakciji s atomima, a 1923. godine A.H. Compton svojim Comptonovim učinkom još je bolje potvrdio čestičnu prirodu elektromagnetskog zračenja. Danas postoji niz poznatih pokusa koji nedvojbeno potvrđuju da se elektromagnetsko zračenje ponaša kao čestica u svojoj interakciji s tvari, a kao val šireći se prostorom. Elektromagnetsko zračenje ima dualnu prirodu: valnočestičnu. Takvo ponašanje fizičari nazivaju kvantnim ponašanjem.

Datum 14. prosinca 1900. godine smatra se rođendanom kvantne fizike.

12.1. TOPLINSKO ZRAČENJE

Toplinsko zračenje emitiraju tijela čiji su atomi ili molekule pobuđeni termičkim gibanjem. Pokusima je utvrđeno da užarena tijela uz ostala zračenja zrače i vidljivu svjetlost. Propuštanjem svjetlosti kroz optičku rešetku ili prizmu nastaje emisijski spektar. Iz njega možemo saznati koje valne duljine sadrži emitirana svjetlost.

Dakle, svako ugrijano tijelo zrači elektromagnetskim zračenjem raznih frekvencija. To zračenje fizičari zovu zračenje crnog tijela. Crno tijelo je tijelo koje bi upilo svako elektromagnetsko zračenje. Crno tijelo na temperaturi T emitira elektromagnetsko zračenje raspodijeljeno po valnim duljinama kao na slici 12.1.



Slika 12.1. Spektar crnog tijela na različitim temperaturama

Njemački fizičar W. Wien otkrio je temeljem pokusa da vrijedi zakon:

$$\lambda_m \cdot T = C$$

gdje je λ_m valna duljina kojoj pripada maksimalna energija zračenja apsolutno crnog tijela, T je apsolutna temperatura na kojoj apsolutno crno tijelo zrači, C je Wienova konstanta koja iznosi C = 2,89·10^{-3} m K.

Slovenski fizičar Jozef Stefan temeljem pokusa, a austrijski fizičar Ludwig Boltzmann teorijskim razmatranjem došli su do istog zakona, Stefan-Boltzmannovog zakona:

$$I = \sigma T^4$$

gdje je I ukupni intenzitet zračenja apsolutno crnog tijela, σ je Stefan-Boltzmannova konstanta koja iznosi σ = 5,67·10^{-8} W m^2 K^4, T je apsolutna temperatura.

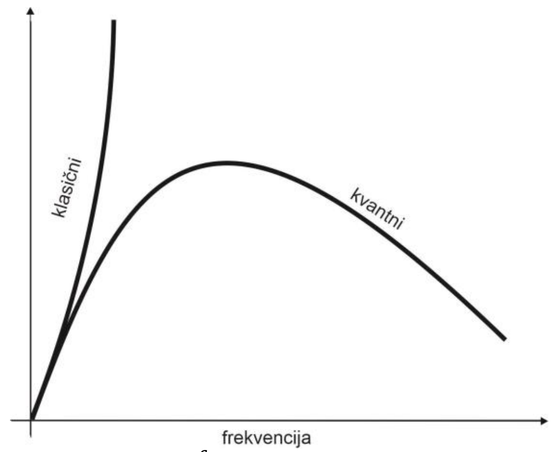
Engleski fizičari Rayleigh i Jeans došli su do zakona zračenja:

$$E = \frac{8\pi f^2}{c^3} kT$$

gdje je k Boltzmannova konstanta, c je brzina svjetlosti (elektromagnetskih valova) u vakuumu, a f je frekvencija svjetlosti.

Iz Rayleigh-Jeansova zakona vidljivo je da energija zračenja neprestano raste s porastom frekvencije (slika 12.2.), što je u suprotnosti s eksperimentom.

I_f



f

Slika 12.2. Ovisnost spektralne gustoće o frekvenciji

Suprotnost je riješio Max Planck 1900. s posve novom idejom o diskontinuiranosti fizičkog zbivanja. Planck je izveo ispravan zakon zračenja uz neobičnu pretpostavku, da energija harmonijskog oscilatora, koji titra s frekvencijom *f*, može biti samo cijeli broj određenog kvanta energije

$$E = nhf$$

gdje je *h* Planckova konstanta ($h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Js), $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$)

Pokazao je, također, da toplinska energija u području normalnih temperatura nije dovoljna da pobudi visokofrekventne oscilatore i zato se intenzitet zračenja za kratke valne duljine smanjuje. Tek je visoka temperatura dovoljna da uzbudi visokofrekventne oscilatore. Njegovom teorijom dobro su opisani eksperimentalni rezultati njegovim Planckovim zakonom zračenja crnog tijela:

$$I_f = \frac{2\pi h f^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \quad \text{ili} \quad I_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

gdje je I_f spektralna gustoća zračenja, *f* frekvencija, λ valna duljina, *k* Boltzmannova konstanta ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K, *c* je brzina svjetlosti u vakuumu, e je baza prirodnih logaritama ($e = 2{,}71828\ldots$), *h* je koeficijent u Planckovoj hipotezi kvanta.

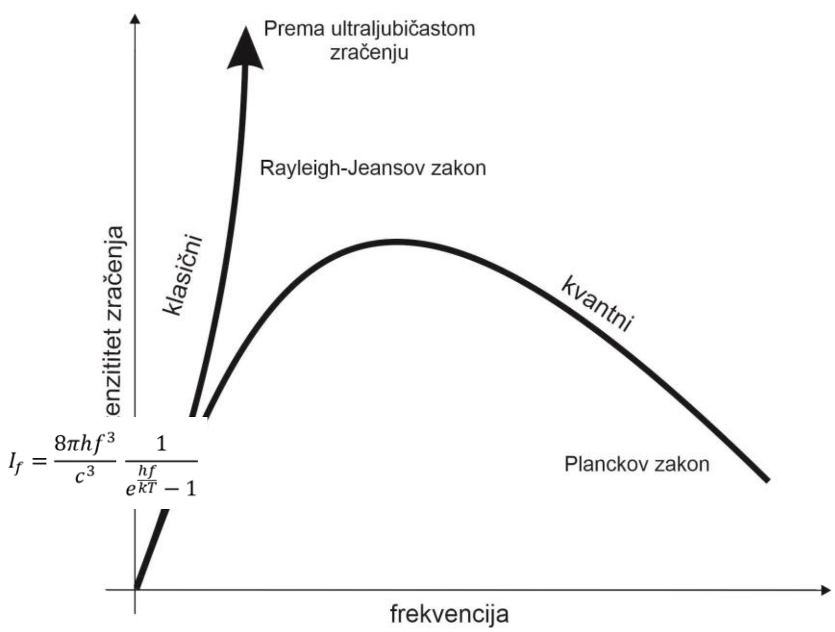
Za Planckov zakon zračenja crnog tijela mogu se rabiti i izrazi

$$I_f = \frac{8\pi hf^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}}-1} \qquad I_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$

gdje je I_f gustoća energije po frekvenciji.

Može se pokazati da se Planckova formula u specijalnim slučajevima može svesti na Rayleigh-Jeansovu.

Wienov i Stefan-Boltzmannov zakon koji su bili poznati prije Planckova zakona mogu se također izvesti iz Planckova zakona.

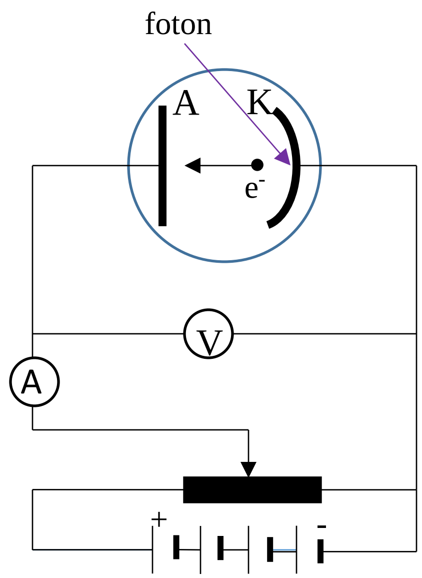


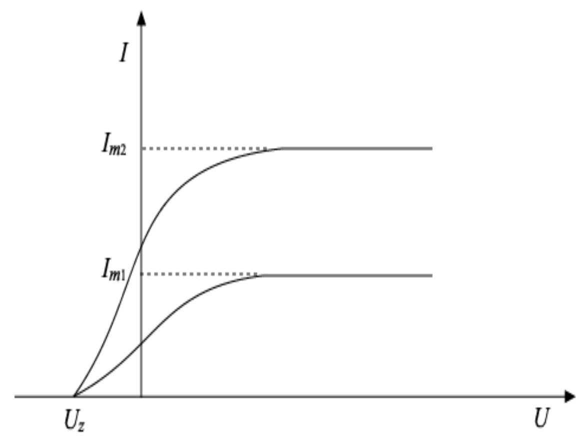
Slika 12.3. Uz Planckov zakon

12.2.Fotoelektrični učinak

Fotoelektrični učinak je pojava izbijanja elektrona iz metala obasjanog elektromagnetskim zračenjem (svjetlosti). Fotoelektrični učinak otkrio je Hertz 1887. godine. Albert Einstein (1879. – 1955.) godine 1905. upotrijebio je fotoelektrični učinak kao dokaz fotonske prirode vidljive svjetlosti, a time i cijelog spektra elektromagnetskog zračenja.

Na slici 12.4. je shematski prikaz uređaja za ispitivanje fotoelektričnog učinka.





Slika 12.4. Ispitivanje fotoelektričnog učinka Slika 12.5. U-I karakteristika

U vakuumiranoj staklenoj cijevi su dvije elektrode (katoda i anoda). Katoda je od metala koji se ispituje. Kada se katoda obasja odgovarajućim elektromagnetskim zračenjem (svjetlosti), iz nje izlijeću elektroni koji se u električnom polju gibaju prema anodi. Tako se strujni krug zatvara i krugom teče struja koju pokazuje ampermetar A, a voltmetar V mjeri napon između katode i anode. Tako možemo odrediti *U,I* karakteristiku (slika 12.5), tj. krivulju koja pokazuje ovisnost fotostruje *I* o naponu *U* između katode i anode pri stalnoj jakosti svjetlosti. Što je jakost svjetlosti veća, to je veći i broj emitiranih fotona. Jakost (intenzitet) svjetlosti utječe samo na broj fotoelektrona (veća jakost, veći broj fotoelektrona).

Povećavanjem napona između elektroda povećava se jakost fotostruje sve do zasićenja (I_{m1} i I_{m2}). Smanjivanjem napona smanjuje se i jakost fotostruje. Kada se napon smanji na nulu, fotostruja i dalje teče (fotoelektroni i dalje izlaze iz katode). Ako je anoda pod negativnim naponom, struja se smanjuje i konačno prestaje teći kada napon dosegne vrijednost U_z. Taj napon pri kojem struja prestaje teći nazva se napon zaustavljanja (U_z). Napon zaustavljanja potpuno zaustavi i najbrže fotoelektrone oslobođene na fotokatodi pa vrijedi:

$$E_{k(maks)} = \frac{mv_{maks}^2}{2} = eU$$

Dakle, mjereći napon zaustavljanja možemo odrediti maksimalnu brzinu i maksimalnu kinetičku energiju fotoelektrona.

Millikan je prvi dokazao da maksimalna kinetička energija, odnosno napon zaustavljanja fotoelektrona ovisi samo o frekvenciji svjetlosti.

Fotoelektrični učinak nemoguće je protumačiti valnom prirodom svjetlosti. Prema valnoj teoriji svjetlosti, na izbijanje elektrona trebala bi jače djelovati svjetlost većeg intenziteta, a pokazalo se da nije tako. Naprotiv, pokusi pokazuju da je brzina, a time i kinetička energija fotoelektrona to veća što je frekvencija svjetlosti veća.

Fotoelektrični efekt je 1905. godine objasnio Albert Einstein korpuskularnom teorijom svjetlosti, a R. A. Millikan je 1914. eksperimentalno dokazao da postoji granična frekvencija ispod koje nema fotoefekta i tako potvrdio Einsteinovu teoriju.

Prema Einsteinu, potaknut Planckovom hipotezom o kvantima, iz izvora svjetlosti izlaze kvanti svijetlosti koji se zovu fotoni. Svaki foton ima energiju:

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

gdje je $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ J s $\approx 4{,}13566743 \cdot 10^{-15}$ eV s Planckova konstanta (jedna od osnovnih fizikalnih konstanti), f frekvencija svjetlosti (elektromagnetskog zračenja), λ valna duljina svjetlosti.

Foton možemo smatrati česticom svjetlosti. Prema relativističkoj fizici, energija neke čestice, njezina masa i količina gibanja povezane su jednadžbom:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Fotoni se nikada ne ubrzavaju, nego se čim nastanu gibaju brzinom svjetlosti. Prema tome, fotoni nemaju tromost ni masu, pa za njih vrijedi:

$$E^2 = p^2c^2 \qquad p = \frac{E}{c} \qquad p = \frac{h}{\lambda}$$

Ako svjetlost shvatimo kao roj fotona, lako možemo objasniti sve pojave povezane s fotoučinkom.

Prema Einsteinu, do fotoučinka dolazi tako što se foton pri upadu na metal u površinskom sloju sudara sa slobodnim elektronom, predaje mu svu svoju energiju, foton nestaje, apsorbira se, a elektron, ako je dobio dovoljnu energiju, izlijeće iz metala.

U tom procesu, dio energije fotona troši se na oslobađanje elektrona iz metala (izlazni rad W_i), a preostali dio pretvara se u kinetičku energiju fotoelektrona:

$$E_f = W_i + E_{k(maks)}$$

$$hf = W_i + \frac{mv_{maks}^2}{2}$$

To je poznata Einsteinova jednadžba za fotoelektrični učinak u kojoj je:

$$E_{k,maks} = \frac{mv_{maks}^2}{2}$$

maksimalna kinetička energija koju fotoelektron može imati (kinetička energija onih elektrona koji se pri izlaženju iz metala nisu sudarili s nekim ionima ili elektronima u metalu), zato vrijedi:

$$\frac{mv^2}{2} \leq hf - W_i$$

Do fotoučinka će doći ako je:

$$E_f > W_i$$

tj. ako je frekvencija svjetlosti takva da vrijedi:

$$hf > W_i$$

Zaključujemo da je granična frekvencija za pojedini metal određena izlaznim radom:

$$W_i = hf_g \qquad\qquad f_g = \frac{W_i}{h}$$

Za svaki metal postoji granična frekvencija svjetlosti (najmanja frekvencija svjetlosti) f_g ispod koje nema izbijanja elektrona ma kako velik bio intenzitet upadne svjetlosti. Fotoefekt će nastati samo onda ako je frekvencija svjetlosti $f > f_g$ (odnosno valna duljina svjetlosti $\lambda < \lambda_g$, λ_g je najveća valna duljina svjetlosti kod koje je moguć fotoučinak), neovisno o jakosti svjetlosti.

Granične frekvencije i valne duljine svjetlosti i izlazni rad ovise o vrsti metala (tablica 12.1.) Za većinu metala nalaze se u ultraljubičastom području, a za cezij i natrij su u vidljivom dijelu spektra.

Metal	**Cezij**	**Natrij**	**Cink**	**Bakar**	**Željezo**	**Srebro**
f_g /Hz	$4{,}7\cdot10^{14}$	$5{,}5\cdot10^{14}$	$10\cdot10^{14}$	$11\cdot10^{14}$	$11{,}45\cdot10^{14}$	$11{,}5\cdot10^{14}$
λ_g/nm	638	540	300	273	262	261
W_i/eV	1,89	2,27	3,74	4,47	4,74	4,76

Tablica 12.1. Granične frekvencije i valne duljine i izlazni rad za neke metale

Fotoelektroni koji se pri izbijanju iz metala sudare s ionima ili elektronima imaju manju kinetičku energiju, pa Einsteinovu jednadžbu možemo pisati:

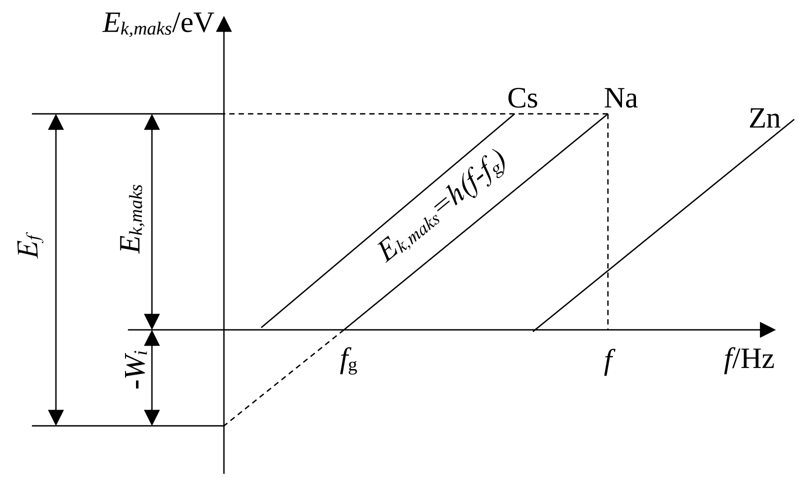
$$E_k \leq hf - W_i$$

i može imati vrijednost nula ili neku drugu vrijednost.

Maksimalna kinetička energija fotoelektrona dobivena eksperimentalno ima oblik (slika 12.6.):

$$E_{k,maks} = h(f - f_g) \qquad \text{ili} \qquad eU = h(f - f_g)$$

Gornje relacije predstavljaju jednadžbe pravca na slici 12.6.



Slika 12.6. Ovisnost $E_{k,maks}$ o frekvenciji upadne svjetlosti

Eksperimentalna je činjenica da broj fotoelektrona ovisi o intenzitetu elektromagnetskog zračenja (svjetlosti). I tu pojavu objašnjava čestična priroda zračenja. Veći intenzitet znači veći broj fotona, a onda je veći i broj izbačenih fotoelektrona.

Interferencijom, difrakcijom i polarizacijom svjetlosti (elektromagnetskog zračenja) pokazana su njezina valna svojstva. Fotoučinak i još neke pojave (Componov učinak) dokaz su čestične prirode zračenja. Zaključujemo da svjetlost (elektromagnetsko zračenje) ima i valnu i čestičnu prirodu (dvojnu prirodu).

Primjer

U nekom eksperimentu, nakon obasjavanja srebrne pločice, izbijene elektrone s maksimalnom kinetičkom energijom zaustavio je napon od 2 V. Koliki je izlazni rad uzorka ako je energija fotona kojima je bila izložena 6,4 eV?

Rješenje

$U = 2$ V

$E_f = 6{,}4$ eV

$W_i = ?$

$$E_f = W_i + E_{k,maks}$$

$$W_i = E_f - E_{k,maks} \qquad E_{k,maks} = eU$$

$$W_i = E_f - eU$$

W_i = 6,4 eV – 2 eV

W_i = 4,4 eV

Primjer:

Površina nekog metala obasjana je svjetlošću valne duljine 589 nm, a zatim valne duljine 405 nm, i pritom se za napone zaustavljanja dobiju vrijednosti 0,2 V i 1,16 V. Iz tih podataka izračunajte Planckovu konstantu i izlazni rad metala.

Rješenje:

λ_1 = 589 nm

λ_2 = 405 nm

U_1 = 0,2 V

$\underline{U_2 = 1{,}16\ \text{V}}$

h, W_i = ?

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_i + eU_1$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = W_i + eU_2$$

$$h = \frac{e(U_2 - U_1)}{\frac{c}{\lambda_2} - \frac{c}{\lambda_1}}$$

$h = 6{,}6377739 \cdot 10^{-34}$ J s

$$W_i = \frac{hc}{\lambda_1} - eU_1$$

$W_i = 3{,}054 \cdot 10^{-19}$ J = 1,909 eV

PITANJA I ZADACI

1. Što je idealno crno tijelo? Kakvo je toplinsko zračenje koje emitira crno tijelo?
2. O čemu govori Stefan-Boltzmannov i Wienov zakon?
3. Napišite Planckovu formulu za spektar zračenja crnog tijela kao funkciju frekvencije i valne duljine i objasnite je.
4. Objasnite ultraljubičastu katastrofu.
5. Objasnite kvantizaciju koju je Planck uveo u fiziku objašnjavajući toplinske spektre.
6. Što je Planckova konstanta? Dokažite da se ona iskazuje istim jedinicama kao moment količine gibanja.
7. Navedite eksperimentalne činjenice povezane s fotoelektričnim učinkom. Mogu li se one objasniti znanjima klasične fizike?
8. Kako je Einstein objasnio fotoučinak? Objasnite Einsteinovu relaciju koja povezuje energiju fotona s energijom fotoelektrona.
9. Povežite energiju fotona s njegovom količinom gibanja.
10. Struja fotoelektrona proporcionalna je jakosti svjetlosti. Zašto?
11. Koliko fotona svake sekunde emitira radioodašiljač snage 10 kW koji radi na valnoj duljini 200 m?
12. Nalazi li se u vidljivoj svjetlosti foton energije 0,36 aJ?
13. Izračunajte energiju i količinu gibanja fotona u laserskom svjetlu helij-neonskog lasera kojima je valna duljina $6{,}328 \cdot 10^{-7}$ m?
14. Koliki je izlazni rad za cink ako je granična valna duljina za fotoučinak za cink 295 nm? Rezultat iskažite u elektronvoltima.
15. Metal kojemu je izlazni rad 1,9 eV obasjamo svjetlošću valne duljine 589 nm. Koliki je napon zaustavljanja potreban da bi prekinuo emisiju fotoelektrona iz metala?
16. Kolika je maksimalna energija i brzina elektrona koji iz metala izbacuje gama-zračenje frekvencije $1{,}23 \cdot 10^{20}$ Hz?
17. Emisija fotoelektrona s neke površine prestaje ako se valna duljina svjetlosti poveća na više od $5{,}4 \cdot 10^{-7}$ m. Ako tu površinu obasjamo svjetlošću valne duljine $4{,}36 \cdot 10^{-7}$ m, kolika je maksimalna energija i brzina elektrona? Koliki bismo napon morali upotrijebiti da zaustavimo emisiju elektrona?
18. Pri pokusu za određivanje Planckove konstante dobiveno je da zračenje frekvencije $8 \cdot 10^{15}$ Hz izbaci iz metala elektrone energije 25 eV, a zračenje frekvencije $3 \cdot 10^{15}$ Hz izbaci iz istog metala elektrone energije 6 eV. Kolika je vrijednost tako dobivene Planckove konstante?

LITERATURA

1. J. Paić, Fizika, Veleučilište u Šibeniku. 2016, (elektronski udžbenik)
2. I. Luketin, Računarska fizika (skripta, elektronska), Split, 2015,
3. V. Henč-Bartolić, P. Kulišić, Valovi i optika, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
4. P. Kulišić, Mehanika i toplina, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
5. P. Kulišić i suradnici, Riješeni zadaci iz mehanike i topline, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
6. N. Cindro, Fizika 1, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
7. N. Cindro, Fizika 2, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
8. I. Supek, M. Furić, Počela fizike, Školska knjiga, Zagreb, 1994.
9. P. G. Hewitt, Conceptual Physics, International Edition, 2002.
10. S. Kilić, T. Persi, Fizika II, Sveučilište u Splitu, Split, 1988.
11. J. Brnjas – Kraljević, Fizika za studente medicine, I. dio, Medicinska naklada, Zagreb, 2001.
12. D. Ivanović, V. Vučić; Atomska i nuklearna fizika, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
13. M. G. Veselov, Elementarna kvantna teorija atoma i molekula, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
14. B. W. Tillery, Physical Science, 2005.
15. Halliday, Resnick, Walker, Fundamentals of Physics, 2008.
16. I. Supek, Moderna fizika i struktura materije, Tehnička knjiga, Beograd, 1960.
17. Eyvind H. Wichmann, Quantum Physics, Berkeley Physics Course, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988
18. https://www.periodni.com/hr/medunarodni_sustav_mjernih_jedinica.html dostupno 12.7.2020.

VELEUČILIŠTE „MARKO MARLIĆ“ U KNINU
PRIJEDIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ PREHRAMBENA TEHNOLOGIJA

FIZIKA - Udžbenik, mr. sc. JOSIP PAIĆ, viši predavač